

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

| | |
|---|-----|
| UTISHAUSER, H., SPEISER, A., und STIEFEL, E.: Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen) (Schluß) | 63 |
| CHÜRCH, H.: Beitrag zur Statik des Balkens von endlicher Breite (Schluß) | 92 |
| RUESDELL, C.: On Ertel's Vorticity Theorem | 109 |

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

| | |
|---|-----|
| LAARD, P. P.: Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch | 114 |
| RÜSSI, F.: Stellungnahme zur Zuschrift von Prof. P. P. Bijlaard | 118 |

Varia - Miscellaneous - Divers

| | |
|--|-----|
| as Kolloquium über Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus in Grenoble (L. Weil) | 120 |
| uchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques | 121 |

| | | | | |
|---------|---------|---------|-------------|-----------|
| Z A M P | Vol. II | Fasc. 2 | Pag. 63-122 | 15. 3. 51 |
|---------|---------|---------|-------------|-----------|

Verlag Birkhäuser, Basel / Schweiz

41
37

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* in der Originalsprache eine kurze Zusammenfassung beigegeben werden, damit diese durch die Redaktion in eine andere der vier genannten Sprachen übersetzt werden kann. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratis-separata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in the original language for translation into one of the four languages by the editor. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separate prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en langue originale qui sera traduit par la rédaction dans une des quatre langues prévues. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 28.-, Ausland Fr. 34.-, Einzelnummer Fr. 6.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 28.-, foreign Fr. 34.-, single copy Fr. 6.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 28.-, étranger Fr. 34.-, le numéro Fr. 6.-

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

| | | | | |
|-------------------|----------|----------|----------|-------------|
| Belgien-Luxemburg | Dänemark | Schweden | Portugal | Italien |
| Holland | Norwegen | Finnland | Marokko | Deutschland |

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 150.-, $\frac{1}{8}$ Seite/page: Fr. 80.-, $\frac{1}{16}$ Seite/page: Fr. 45.-

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1951 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10 (Switzerland)

Printed in Switzerland

Programmgesteuerte digitale Rechenggeräte (elektronische Rechenmaschinen)

Zusammenfassender Bericht (Schluß)

Von HEINZ RUTISHAUSER, AMBROS SPEISER und EDUARD STIEFEL¹⁾

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-------|
| § 1. Grundlagen und wissenschaftliche Bedeutung | 278*) |
| 1.1 Digitale Maschinen und Analogiegeräte | |
| 1.2 Die Programmsteuerung | |
| 1.3 Rechengeschwindigkeit | |
| 1.4 Beziehungen zur Logik | |
| 1.5 Rechenautomaten und Nervensystem | |
| 1.6 Geschichtliches | |
| 1.7 Anwendungen | |
| § 2. Organisation und Arbeitsweise | 287*) |
| 2.1 Prinzipschema | |
| 2.2 Hauptteile eines Rechenautomaten | |
| 2.3 Befehlsgebung | |
| § 3. Arithmetische Prinzipien | 340*) |
| 3.1 Zahlssysteme | |
| 3.2 Duale Verschlüsselung | |
| 3.3 Darstellung der Zahlen in der Maschine | |
| 3.4 Rechnen mit halblogarithmisch dargestellten Zahlen | |
| 3.5 Rechnen mit Maschinen mit festem Komma | |
| 3.6 Aufrunden | |
| 3.7 Übersetzung vom Dezimal- ins Dualsystem | |
| § 4. Vorbereitung von Rechenplänen. | 2 |
| 4.1 Allgemeiner Gang der Vorbereitung | |
| 4.2 Struktur eines numerischen Problems | |
| 4.3 Die Sprungbefehle | |
| 4.4 Das Strukturdiagramm | |
| 4.5 Verschiedene Arten der Befehlsgebung | |
| 4.6 Rechnen mit Befehlen | |
| 4.7 Beispiel einer Befehlsreihe | |
| 4.8 Behandlung der Funktionen | |
| 4.9 Rechenkontrollen | |
| § 5. Physikalische Grundlagen | 64 |
| 5.1 Logische Grundschaltungen | |
| 5.2 Das Rechenwerk | |
| 5.3 Der Speicher | |
| 5.4 Das Leitwerk | |
| 5.5 Eingang und Ausgang | |

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

*) Vol. I, 1950.

§ 5. Physikalische Grundlagen

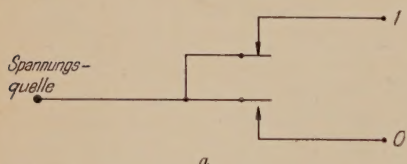
In Kapitel 2 sind die Hauptteile eines Rechenautomaten bezüglich ihrer Funktion beschrieben worden. Gegenstand des vorliegenden Kapitels wird es sein, den Aufbau dieser Teile im einzelnen zu studieren.

5.1. Logische Grundsaltungen

5.10. Elektrische Darstellung dualer Zahlen

Zunächst soll dargelegt werden, wie die Zahlenwerte und Befehle durch elektrische Signale dargestellt werden. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß alle in einer Maschine vorkommenden Informationen durch die wiederholte Anwendung der Ziffern 0 und 1 ausgedrückt werden können. Für diese zwei Ziffern werden nun verschiedene elektrische Analogien verwendet, deren Auswahl im allgemeinen von den verwendeten Schaltelementen abhängt. Wichtig sind die drei folgenden Möglichkeiten:

a) Ein- und ausgeschaltete elektrische Leitung für 1 und 0: Dieses Verfahren wird besonders in Relaischaltungen verwendet. Die Zahl 1 wird durch eine durchgehende Verbindung zur Spannungsquelle dargestellt, die Zahl 0 durch eine unterbrochene Verbindung, gemäß Fig. 14a.



b) Zwei verschiedene Spannungspegel für 1 und 0: Dies kommt in Röhrenschaltungen zur Anwendung. Das Spannungsdiagramm für die zeitliche Ziffernfolge 110010 ist in Fig. 14b dargestellt. Es ist ersichtlich, daß die Spannung zwischen aufeinanderfolgenden 1-Werten nicht auf einen Ausgangswert zurückkehrt. Diese Darstellung von Zahlen wird daher auch als «statische» bezeichnet.

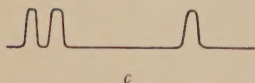
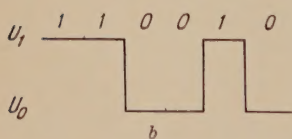


Fig. 14

Die Darstellung von Dualziffern durch elektrische Analogien.

mehr gleichberechtigt sind, indem 0 als Ruhelage eine Vorzugsstellung einnimmt.

5.11. Die logischen Grundoperationen

Die im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Potentiale lassen sich als Funktionen auffassen, welche nur zwei Funktionswerte annehmen können. Daher ist zu ihrer mathematischen Behandlung der Aussagenkalkül der theoretischen Logik geeignet; der Wert 1 wird als richtige Aussage, der Wert 0 als falsche Aussage aufgefaßt. Dieser Kalkül wird hier in seinen Grundzügen als bekannt vorausgesetzt¹⁾.

Es läßt sich zeigen [29], daß zur Darstellung aller Aussagenverbindungen nur drei Grundverknüpfungen nötig sind, nämlich

die Negation:

$$f(A) = \bar{A} ,$$

die Disjunktion:

$$g(B, C) = B \vee C$$

und die Konjunktion:

$$h(D, E) = D \& E$$

Es wird nun eine Anzahl von Schaltungssystemen beschrieben, welche die Ausführung von logischen Operationen besorgen und welche sich in der Praxis bewährt haben. Jedes dieser Systeme ist *vollständig* in dem Sinn, als es mindestens die drei erwähnten Grundverknüpfungen auszuführen gestattet. Dabei ist es belanglos, ob diese Operationen mit je einem einzigen Element dargestellt werden oder ob dazu Elemente kombiniert werden müssen. Gelegentlich werden auch mehr als drei verschiedene Elemente vorgesehen; dies bewirkt, daß gewisse Aussagenverbindungen auf verschiedene Arten verwirklicht werden können, und ermöglicht in komplizierteren Fällen eine Materialersparnis.

5.12. Elektromechanische und elektronische Verwirklichung

Mit elektromagnetischen Relais läßt sich ein einfaches und zweckmäßiges Schaltungssystem aufbauen; die Darstellung der Werte 0 und 1 erfolgt nach § 5.10, Abschnitt a. Die Schaltungen sind in Fig. 15 gezeigt²⁾.

Die Ausgänge dieser Schaltungen können verwendet werden, um weitere Kontakte zu speisen, oder sie können mit Spulen verbunden werden und dadurch neue Relais betätigen. In diesem Fall ist zu

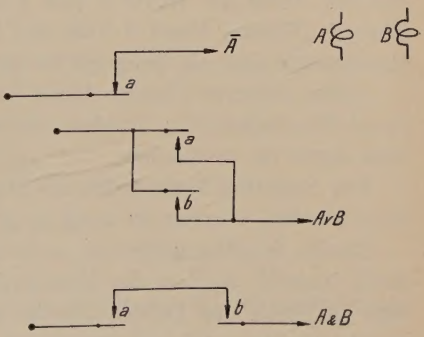


Fig. 15
Grundsaltungen mit elektromagnetischen Relais.

¹⁾ Die hier verwendete Symbolik lehnt sich an diejenige von HILBERT [29] an.
²⁾ Nach den in der Schweiz üblichen Normen werden die Relaisspulen mit großen Buchstaben und die durch sie betätigten Kontakte mit entsprechenden kleinen Buchstaben dargestellt.

beachten, daß ein zusätzlicher Zeitverzög eingeführt worden ist, welcher der Anzugs- bzw. Abfallzeit der Relais entspricht; diese Tatsache verbietet in vielen Anwendungen die Verwendung zusätzlicher Spulen innerhalb einer Schaltung, obwohl sich dadurch eine bedeutende Einsparung an Material erzielen ließe.

Die Ansprechzeit von Relais läßt sich nicht wesentlich unter 5 ms reduzieren, ohne daß die Betriebssicherheit leidet. In schnell arbeitenden Rechenautomaten muß daher zu Vakuumröhren gegriffen werden. Da nur zwei verschiedene Funktionswerte zu verarbeiten sind, werden diese auf der Charakteristik der Röhre möglichst weit auseinandergelegt, und die Aussteuerung erfolgt weit über den linearen Teil hinaus. Dadurch wird erreicht, daß Typenstreuung und Alterung der Röhren nur wenig Einfluß auf die Schaltung haben. — Die Zusammenschaltung der Grundelemente wird durch die Verwendung von Röhren prinzipiell vereinfacht, da diese, im Gegensatz zu Relaiskontakten, gleichrichtende Eigenschaft haben und daher den Strom nur in einer Richtung durchlassen.

In den folgenden Abschnitten werden einige der gebräuchlicheren Schaltungssysteme beschrieben. Eine kurze Übersicht findet sich in [41].

5.13. Verwirklichung mit Dioden

Die beiden Grundverknüpfungen $\&$ und \vee lassen sich mit Dioden realisieren. Die Darstellung von 0 und 1 ist dabei etwa wie folgt:

0: 0 Volt

1: + 20 Volt

Die Schaltungen sind in Fig. 16 ersichtlich. Sie lassen sich ebensogut verwenden, wenn die Werte 0 und 1 durch Impulse dargestellt sind, wobei das Bezugs- (Ruhe-) Pegel 0 Volt ist. Die angegebenen Spannungs- und Widerstandswerte sind als Beispiele zu betrachten.

Sollen mehrere Glieder dieser Art zusammengeschaltet werden, so sind sie durch Zuschalten von Trioden voneinander unabhängig zu machen, um Rückwirkungen zu vermeiden.

Die Negation kann nicht mit Dioden, welche passive Elemente sind, realisiert werden, sondern es muß zu gittergesteuerten Röhren gegriffen werden.

Dieses Schaltungssystem, welches sich bestens in die Symbolik von HILBERT einpaßt, wird in der Maschine EDSAC verwendet [58]. Es sei erwähnt, daß an Stelle der Dioden häufig auch Kristalle (Gleichrichterkristalle) verwendet werden; dies geschieht zum Beispiel in der Maschine BINAC sowie an andern Orten.

5.14. Verwirklichung mit Trioden

Dieses System verwendet zwei Grundverknüpfungen; die erste ist:

$$f(X, Y) = X \vee \bar{Y}.$$

Aus dieser Funktion lassen sich die drei in § 5.11 vorgelegten Operationen durch Verwendung folgender Äquivalenzen kombinieren:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= f(F, A) , \\ B \vee C &= f(B, \bar{C}) , \\ D \& E &= \bar{f}(\bar{D}, E) .\end{aligned}$$

F bedeutet hierbei eine immer falsche Aussage.

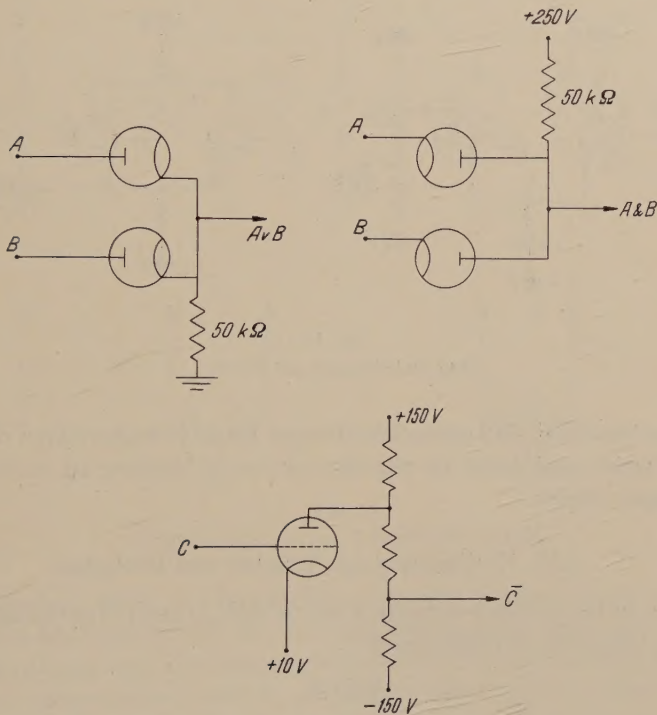


Fig. 16
Grundschaltungen mit Dioden.

Fig. 17a veranschaulicht die entsprechende Schaltung. Die dazugehörigen Spannungspegel sind:

- 0: - 20 Volt,
- 1: + 20 Volt.

Die angegebenen Widerstands- und Spannungswerte eignen sich für die Doppeltriode 6J6.

Obwohl eine weitere Grundverknüpfung an sich nicht nötig wäre, ist ihre Verwendung im Interesse einer Materialersparnis doch wünschenswert. Es wird gewählt:

$$g(X, Y) = X \vee Y,$$

welches gemäß Fig. 17b realisiert wird. Die angegebenen Werte eignen sich wiederum für die Röhre 6J6. — Diese Elemente können direkt, also ohne die Verwendung von Puffern, aneinandergeschaltet werden.

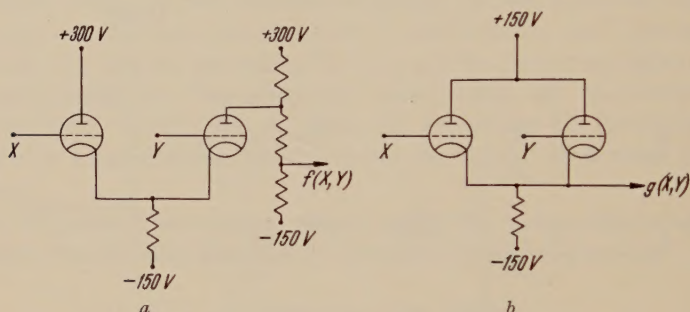


Fig. 17

Grundsaltungen mit Trioden.

Es ist zu beachten, daß diese Schaltungen keine Induktivitäten oder Kapazitäten enthalten und daher im allgemeinen wenig Neigung zu unerwünschten Schwingungen zeigen.

5.15. Realisierung mit Trioden und Pentoden

Das hier zu beschreibende System wurde von AIKEN [5] entwickelt; es verwendet die folgenden Verknüpfungen:

$$\overline{A \& B},$$

$$\overline{A \vee B},$$

$$A \vee B,$$

$$\bar{A}.$$

Die Festsetzung bezüglich der Spannungspegel ist diese:

$$0: -20 \text{ Volt},$$

$$1: +1 \text{ Volt}.$$

Die Diagramme sind in Fig. 18 gegeben. Darunter sind die von AIKEN verwendeten Schaltungssymbole angegeben, welche die Aufstellung von leicht

überblickbaren Diagrammen ermöglichen. (Die Buchstaben «CF» sind eine Abkürzung für Cathode Follower [Kathodenverstärker]).

Von Interesse ist besonders die erste Schaltung, welche die Pentode 6AS6 verwendet. Dies ist eine Röhre, deren Fanggitter eine hohe Steilheit besitzt und dadurch den Anodenstrom bereits bei einer mäßig negativen Spannung abschneidet. Mit einer konventionellen Pentode wäre die Schaltung nicht in

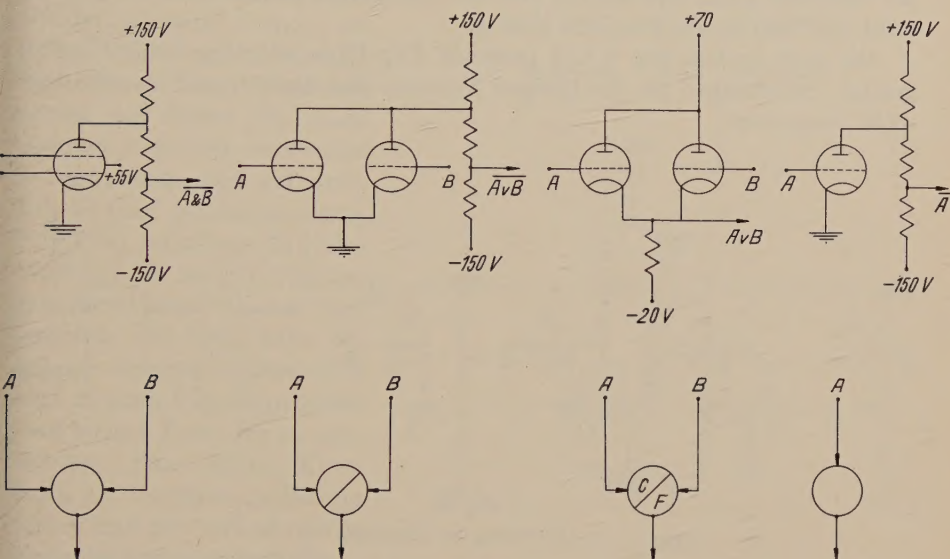


Fig. 18

Grundschaltungen mit Trioden und Pentoden.

dieser einfachen Weise zu verwirklichen, da das Fanggitter zu hohe Steuerungsspannungen benötigen würde. So aber können die gezeigten vier Grundelemente ohne Zuschaltung von Zwischengliedern direkt zu komplizierten Kombinationen zusammengeschaltet werden. Außerdem lassen sich die Anoden beliebig vieler Röhren parallel schalten, wobei nur ein einziger Spannungsteiler benötigt wird. Die Ausgangsvariable ist dann gleich Null, wenn mindestens eine der Röhren einen Anodenstrom führt.

Auch dieses Schaltungssystem verwendet weder Induktivitäten noch Kapazitäten. Es wird in der Maschine «Mark III» für statische Spannungen sowie für Impulse verwendet; die Grundfrequenz der Variablen beträgt dort etwa 30 kc/s.

5.16. Quellen für die statischen Spannungen

In der Anordnung gemäß § 5.12, welche Relaiskontakte verwendet, werden die statischen Spannungen durch die Stromquelle geliefert, welche eine Bat-

terie oder ein rotierender Umformer sein kann. In den Schaltungen mit Vakuumröhren, wo beiden Werten 0 und 1 wohldefinierte Potentiale entsprechen, haben die Ausgangsvariablen im allgemeinen ihren Ursprung im Speicher, von wo sie in Form von Impulsen ankommen. Es ist also eine Anordnung nötig, welche durch Impulse in eine von zwei verschiedenen Stellungen gebracht werden kann und alsdann in dieser Stellung verharrt; diese Bedingung erfüllt der bekannte Flip-Flop, welcher aus zwei kreuzweise geschalteten Trioden besteht und zwei stabile Zustände besitzt.

Die zum System von § 5.15 passende Flip-Flop-Schaltung ist in Fig. 19 gezeigt. Schaltungen für die übrigen Systeme sind ähnlich und werden hier nicht besprochen.

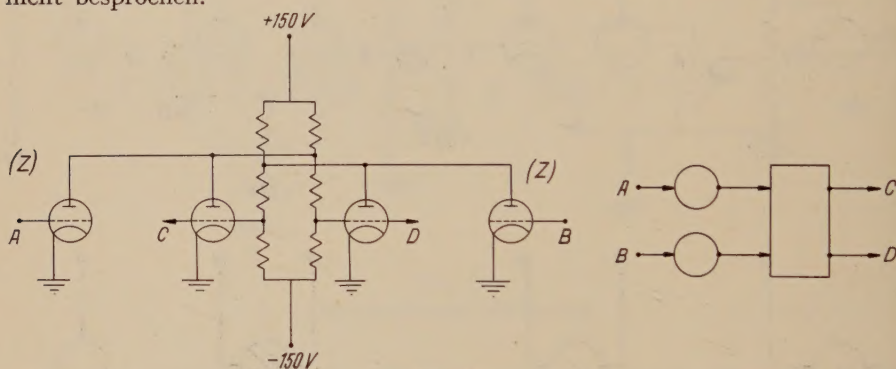


Fig. 19
Schaltung des Flip-Flop.

Von Wichtigkeit ist die Frage, wie der Flip-Flop durch Impulse gesteuert wird. Verfahren, welche die Schaltung durch Steuern eines einzigen Einganges abwechselnd in die eine und in die andere Stellung verbringen, werden in Rechenautomaten nur ungerne angewendet, da sie nicht genügend betriebssicher sind. Es ist vorteilhafter, zwei Eingänge vorzusehen, von denen je einer für die Stellung «0» und «1» verwendet wird; das betriebssicherste Verfahren verwendet zwei sogenannte Zieherröhren gemäß Fig. 19. Diese sind normalerweise nicht leitend; ein positiver Impuls auf das Gitter einer dieser Röhren macht die Anode leitend, «zieht» die Anodenspannung der benachbarten Flip-Flop-Röhre herunter und macht diese ebenfalls leitend.

Die Ablesung der Stellung des Flip-Flop erfolgt an einem der Gitter (C, D); die hier vorhandenen Potentiale entsprechen genau der Normierung von -20 bzw. +1 Volt. Es können somit die Grundelemente von Abschnitt § 5.15 angeschlossen werden.

Zu beachten ist, daß hier die Eingänge zu den Anoden führen, während die Ausgänge von den Gittern herkommen, entgegen der Festsetzung für Trioden in gewöhnlicher Schaltung.

Bei der Realisierung komplizierterer Schaltfunktionen wird oft die in Fig. 20a angegebene Kombination benötigt. Es ist nun möglich, dies unter Verwendung von nur zwei Pentoden zu bewerkstelligen, indem deren Schirmgitter ebenfalls als aktive Elemente beigezogen werden; sie spielen in diesem Fall die Rolle der Anoden des Flip-Flop. Die Realisierung nebst dem von AIKEN verwendeten Symbol ist unter *b* und *c* ersichtlich. Die Anodenkreise der Pentoden können ihrerseits wieder als Zieher für einen weiteren Flip-Flop verwendet werden; dann wird auf einen Impuls bei *C* hin der im ersten Flip-Flop enthaltene Ja-Nein-Wert auf den zweiten übertragen, bleibt aber trotzdem dort bestehen. Die Kette kann beliebig fortgesetzt werden, doch sind in allen Flip-Flops außer dem letzten Pentoden zu verwenden. Eine solche Kette kann als Verzögerungsleitung (delay line) mit veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit betrachtet werden; die Impulse sind abwechselnd an alle geraden und an alle ungeraden Glieder anzulegen, und die Impulsfrequenz bestimmt die Geschwindigkeit der Fortpflanzung. Es sind also zwei Gruppen von phasenverschobenen Impulsen erforderlich. Diese zwei Impulsgruppen spielen allgemein im Aikenschen Schaltungssystem eine wichtige Rolle.

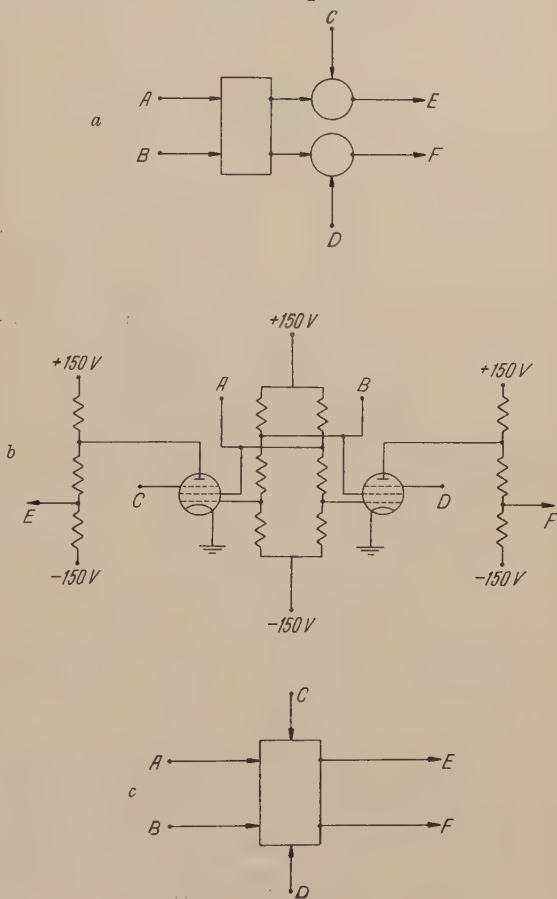


Fig. 20
Flip-Flop-Schaltung mit Pentoden.

Anordnungen von der beschriebenen Art werden überall dort verwendet, wo Ja-Nein-Werte um eine oder mehrere Impulszeiten verzögert werden müssen. Diese Art der Verzögerung ist betriebssicherer und zuverlässiger als der bekannte Tiefpaß, welcher Kapazitäten und Induktivitäten verwendet und welcher ebenfalls weite Verbreitung genießt.

Es besteht auch die Möglichkeit, den Ausgang einer solchen Kette mit umgekehrter Phase gemäß Fig. 21 wieder dem Eingang zuzuführen, wodurch ein Zähler entsteht, der als *Ring* bezeichnet wird. Diese Anordnung wird häufig

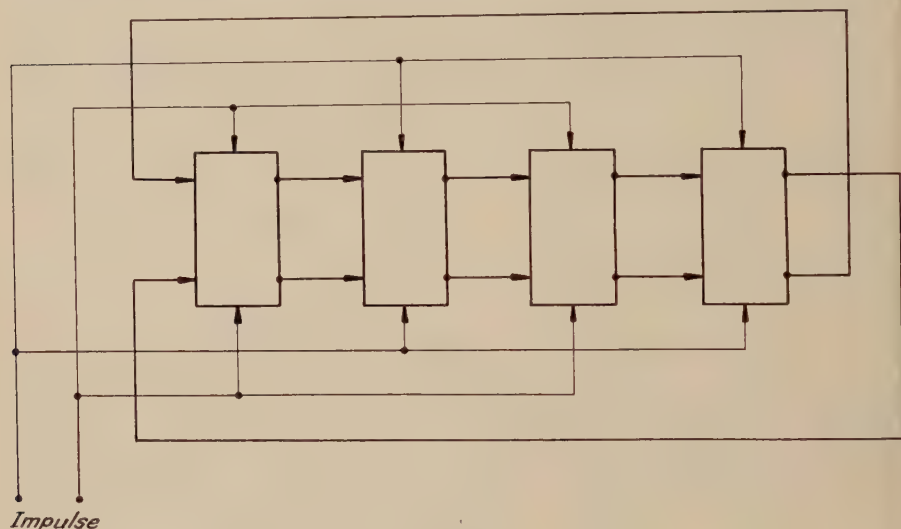


Fig. 21
Ringschaltung.

im Leitwerk eines Rechenautomaten verwendet, wo sie zur Steuerung der Operationen dient.

5.17. Die Frage der Betriebssicherheit

Bei der großen Anzahl der in einem Rechenautomaten verwendeten Schaltelemente spielt die Betriebssicherheit eine bedeutsame Rolle, und es muß von den Einzelteilen ein hoher Grad von Zuverlässigkeit verlangt werden. Es sind für diesen Zweck besondere Röhren auf den Markt gebracht worden, deren Kathode eine Lebensdauer von 18000 Stunden besitzt und die sich im Betrieb gut bewährt haben. Weiterhin werden die verwendeten Widerstände in bezug auf ihre Belastbarkeit mit einem Sicherheitsfaktor betrieben, und es werden nur Produkte erster Qualität verwendet. Die Verwendung von Elektrolytkondensatoren wird vermieden.

Trotzdem muß in einem elektronischen Rechengerät mit mehreren Betriebsunterbrüchen pro Woche gerechnet werden, und der Aufbau muß daher so erfolgen, daß auftretende Defekte sofort angezeigt werden und leicht behoben werden können (vgl. § 4.9).

5.18. Schaltungsalgebren

Es ist naheliegend, für elektrische Schaltungen nach einer mathematischen Symbolik zu suchen, welche einen besseren Überblick über das Verhalten der betreffenden Konfiguration gewährt. Insbesondere im Fall von Ja-Nein-Funktionen, wo die vorkommenden Variablen nur zwei verschiedene Werte annehmen können, sind für die Erfüllung gegebener Bedingungen oft mehrere verschiedene Schaltungen geeignet; ein zweckmäßiger Kalkül würde es gestatten, diese ineinander überzuführen.

Der erste Anstoß in dieser Richtung scheint von SHANNON [48] gegeben worden zu sein. Er entwickelt eine Schaltungsalgebra, welche das Verhalten einer Konfiguration von Relaiskontakten beschreibt. Die Rechenregeln gleichen im wesentlichen denjenigen der Booleschen Algebra.

Eine ähnliche Algebra, welche jedoch etwas weiter geht und mathematisch besser fundiert ist, wurde von PLECHL und DUSCHEK [21], [43] vorgeschlagen.

Das Problem, für eine vorgeschriebene Funktion die Lösung mit dem geringsten Aufwand an Schaltelementen zu finden, wurde erstmals von AIKEN bearbeitet [5]. AIKEN beschreitet ähnliche Wege wie SHANNON, doch ist seine Symbolik speziell für die Darstellung von Vakuumröhren-Operatoren gemäß § 5.15 und § 5.16 geeignet. Der von ihm mit «Minimizing» bezeichnete Prozeß wird mit Hilfe besonderer, eigens für diese Zweck vorbereiteter Tabellen auf analytischem Wege durchgeführt. — Im Aikenschen Verfahren sind auch gewisse Ansätze zur Einführung der Zeit als einer unabhängigen Variablen zu finden; doch lassen sich zeitliche Abläufe nur in beschränktem Grade darstellen, wie überhaupt alle erwähnten Algebren daran krankten, daß zeitliche Veränderungen, also zum Beispiel Rechenprozesse, nicht erfaßt werden können.

In der Praxis zeigt es sich, daß im allgemeinen beim Entwurf einer Schaltung ein geübter Ingenieur schneller und besser zum Ziel gelangt, wenn er durch Probieren die geeignetste Lösung sucht, als wenn er eine Schaltungsalgebra verwendet. Dagegen ist zur Formulierung von Bedingungen eine Symbolik in vielen Fällen wohl geeignet.

5.19. Die mechanische Schaltgliedtechnik

An dieser Stelle muß die in den vergangenen 15 Jahren von ZUSE in Berlin entwickelte mechanische Schaltgliedtechnik erwähnt werden, obwohl sie sich nur für langsame Rechengерäte eignet und im Verein mit elektronischen Elementen kaum zur Verwendung kommen kann. Es handelt sich hier um ein Rechen- und Speicherverfahren auf rein mechanischer Grundlage, wobei jedoch, im Gegensatz zu den Vorgängen in Handrechenmaschinen, nur Ja-Nein-Werte vorkommen; das heißt, die mechanischen Glieder können nur zwei verschiedene Stellungen einnehmen. Dieses Prinzip eröffnet interessante Möglichkeiten, und

es bestehen für die Weiterentwicklung gute Aussichten. Bisher liegen darüber keine Veröffentlichungen vor.

5.2. Das Rechenwerk

Das Rechenwerk führt im allgemeinen nur Additionen aus. Andere Operationen, wie Subtraktion, Multiplikation, ferner in gewissen Fällen Wurzelziehen und Division, werden durch ein im Leitwerk permanent eingebautes Programm in Additionen aufgespalten. Eine Ausnahme bildet lediglich die gelegentlich verwendete dezimale Multiplikationstafel, die zum Rechenwerk gehört; sie ist in § 5.24 beschrieben.

Ein Rechenwerk kann in Serie oder parallel arbeiten. Im ersten Fall werden die beiden Summanden je durch einen einzigen Kanal geführt und ziffernweise in einem einstelligen Addierwerk addiert; im zweiten Fall werden dem Rechenwerk sämtliche n Stellen der Summanden zugleich zugeführt und in n elementaren Addierwerken gleichzeitig addiert. Es ist klar, daß ein paralleles Addierwerk bedeutend schneller arbeitet und bedeutend mehr Material benötigt.

5.21. Das elementare Addierwerk

Im Falle des dualen Zahlensystems besitzt das elementare Addierwerk drei Eingänge A , B , C und zwei Ausgänge S , U . An den Eingängen A und B werden die entsprechenden Ziffern der beiden Summanden eingegeben und bei C ein allfälliger dualer Übertrag von der nächstniedrigen Stelle; am Ausgang S entsteht die Summe und am Ausgang U der duale Übertrag. Die Funktionen S und U hängen wie folgt von den Variablen A , B , C ab:

| A | B | C | S | U |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es handelt sich hier also um zwei simultane Funktionen von drei Variablen. Es ist nun ein leichtes, diese Funktionen durch Kombination der Grundelemente herzustellen. Je nach der Art dieser Grundelemente sehen diese Kombinationen etwas verschieden aus. In Fig. 22 ist die Lösung in dem in § 5.15 beschriebenen

System wiedergegeben. (Die Bezeichnungen \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{S} bedeuten, daß für diese Anschlüsse die Konvention bezüglich der Bedeutung von 0 und 1 umgekehrt ist, das heißt, daß in solchen Fällen eine Spannung von -20 Volt eine 1 bedeutet, eine solche von $+1$ Volt dagegen eine 0. Die Ausgangsvariablen eines solchen Addierwerkes rühren im allgemeinen von Flip-Flops her; dieser Umkehrung von 0 und 1 kann also durch einfache Vertauschung von zwei Anschlüssen Rechnung getragen werden).

Es ist zu beachten, daß dieses Addierwerk aus zwei gleichen Teilen besteht, welche die in Fig. 23 angegebene Form haben, und welche zwei duale Ziffern

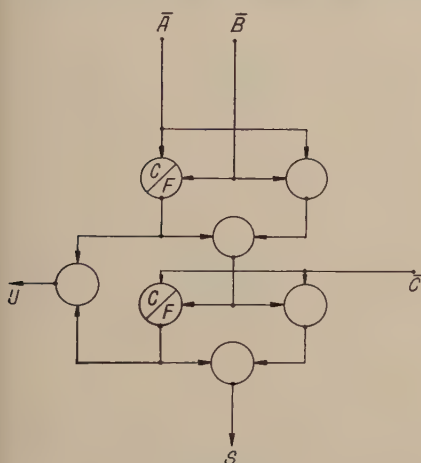


Fig. 22

Vollständiges elektronisches Addierwerk.

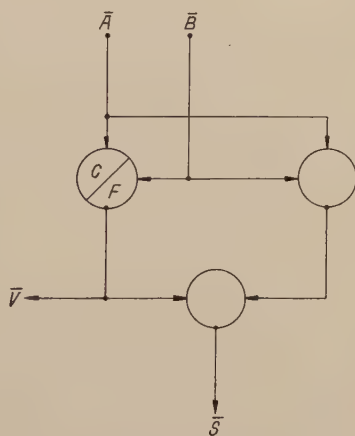


Fig. 23

Halbes Addierwerk
(ohne ankommenden Übertrag).

addieren können, deren Summe S ist. Der erste Teil (in Fig. 22 oben) addiert die Ziffern der Summanden, der zweite Teil addiert diese Summe zum Übertrag von der vorhergehenden Stelle. Aus jedem dieser Teile kann ein Übertrag V kommen; diese Überträge werden in der links befindlichen Pentode gemischt. Es läßt sich zeigen, daß niemals aus beiden Teilen gleichzeitig ein Übertrag kommen kann.

Analoge Addierwerke lassen sich mit den in § 5.13 oder § 5.14 beschriebenen Schaltungssystemen bauen.

Es gibt nun noch ein weiteres Verfahren zur Addition dualer Zahlen, welches von den beschriebenen grundsätzlich abweicht. Es beruht auf der Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze; solche Addierwerke werden daher als Kirchhoff-Addierwerke bezeichnet. Sie machen sich die Tatsache zunutze, daß die Funktionen S und U in den unabhängigen Variablen A , B , C symmetrisch sind. Jede dieser Variablen schickt nun, wenn sie gleich 1 ist, einen bestimmten,

genau festgesetzten Strom durch einen Widerstand, etwa gemäß Fig. 24. Es ist ersichtlich, daß der Punkt P die Spannungspegel 0, 50, 100, 150 Volt annehmen wird, je nachdem, ob die Summe $A + B + C$ gleich 0, 1, 2 oder 3 ist.

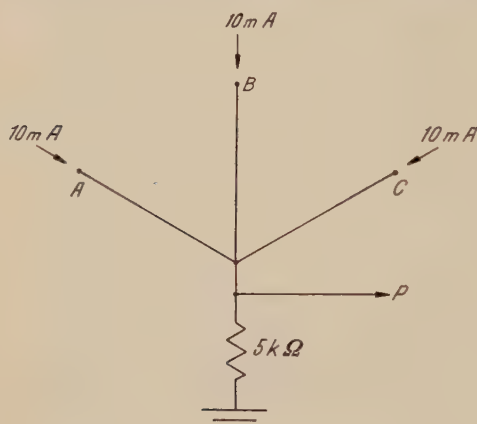


Fig. 24

Kirchhoff-Addierwerk.

Es gilt nun, diese Potentiale bezüglich ihrer Bedeutung zu interpretieren. Es ist leicht zu sehen, daß ein Übertrag auf die nächste Stelle stattzufinden hat, sobald das Potential 100 Volt oder höher ist. Es ist daher eine Schaltung vorzusehen, welche etwa von 75 Volt an einen Übertrag abgibt. Schwieriger ist es, die Ziffernsumme S abzuleiten. Die Regel ist wie folgt: Wenn ein Übertrag festgestellt wurde, so sind 100 Volt zu subtrahieren. Dann bedeutet 0 Volt eine 0, 50 Volt eine 1.

Die Ströme von 10 mA werden von Röhren geliefert, die als Quellen konstanten Stromes geschaltet sind.

Die Deutung des Potentials bei P geschieht ebenfalls durch Röhren. Es werden für eine Dualstelle insgesamt etwa 16 Trioden benötigt.

Diese Kirchhoff-Addierwerke haben den Vorteil, außerordentlich schnell zu arbeiten, was insbesondere im Falle des parallelen Rechenwerkes zur Geltung kommt, wo ein Übertrag sich unter Umständen durch alle Stellen fortpflanzen muß, ehe das Resultat bereit ist. Ihr Bau und Unterhalt ist jedoch schwierig und erfordert bedeutende Erfahrung auf dem Gebiet der elektronischen Schaltungstechnik.

Die gezeigten elementaren Addierwerke führen Additionen, nicht aber Subtraktionen aus. Die Subtraktion wird durch Addition bei vorheriger Komplementbildung des Subtrahenden ersetzt, wie dies in Kapitel 3 dargelegt worden ist. Die Bildung der Komplemente ist überaus einfach, wenn man sich erinnert, daß die Variablen im allgemeinen durch einen Flip-Flop ins Addierwerk eingespiessen werden. Es handelt sich also lediglich darum, den Anschluß von einem Gitter zum andern umzuschalten, was auf elektronischem Wege geschieht.

Die vorstehenden Bemerkungen gelten für das Rechenwerk eines dualen Rechenautomaten. Im Falle dezimaler Maschinen, wo die Dezimalziffern durch eine duale Verschlüsselung dargestellt werden, werden im allgemeinen diese vier Dualstellen so addiert, als wären sie eine duale Zahl, das heißt mit Hilfe der obenerwähnten elementaren Addierwerke. Alsdann ist in gewissen Fällen eine Korrektur anzubringen, welche sich nach der Art der Verschlüsselung

richtet. Die Schaltungen, die diese Korrektur bewirken, bauen sich aus den üblichen Grundelementen auf; sie sollen im einzelnen hier nicht beschrieben werden.

5.22. In Serie arbeitende Rechenwerke

In einem solchen Rechenwerk ist das verwendete Addierwerk nur einstellig. Dieses besitzt für jeden Summanden einen einzigen Eingang, wo eine Stelle nach der andern, beginnend mit der niedrigsten, eingespiessen wird. Der entstehende Übertrag wird um eine Stellenzeit verzögert und dem Übertragseingang wieder zugeführt. Diese Anordnung ist in Fig. 25 gezeigt. Die Verzögerung wird auf eine der in § 5.16 beschriebenen Arten verwirklicht.

Von Interesse ist stets das Verhalten eines Addierwerkes bei durchgehendem Übertrag, das heißt in solchen Fällen, wo das Vorhandensein eines Übertrages in der folgenden Stelle wiederum einen solchen verursacht. Dies tritt bei Additionen von folgender Form ein:

$$LLLLL + L = L00000.$$

Das vorliegende Addierwerk wird diesen Fall ohne Schwierigkeiten bewältigen, da für die Addition einer Stelle jeweils die Dauer einer ganzen Ziffernzeit zur Verfügung steht.

In einfachen Rechenautomaten gelangen die Zahlen direkt vom Speicher ins Addierwerk. In andern Fällen besitzt das Rechenwerk gesonderte Register, welche die Zahlen aufnehmen und für die Verwendung im Addierwerk bereit halten. Diese müssen regenerierende Register sein, welche eine Ziffer nach der andern abgeben. Die aus dem Addierwerk kommenden Resultate gehen ebenfalls entweder in den Speicher oder auf ein Zwischenregister.

Gelegentlich ist in diesem Zusammenhang der Übergang von paralleler auf Serien-Darstellung erforderlich; dieser Vorgang ist in [41] beschrieben.

5.23. Parallel arbeitende Rechenwerke

Ein solches Rechenwerk verwendet ebenso viele elementare Addierwerke, wie die zu verarbeitenden Zahlen Stellen besitzen; alle Ziffern werden gleichzeitig eingegeben, und der Übertrag läuft von einer Stelle zur andern. Hier spielen die Zeitkonstanten in den Schaltungen eine wichtige Rolle; denn die Summe an der Stelle i (und damit auch der Übertrag zur Stelle $i + 1$) kann

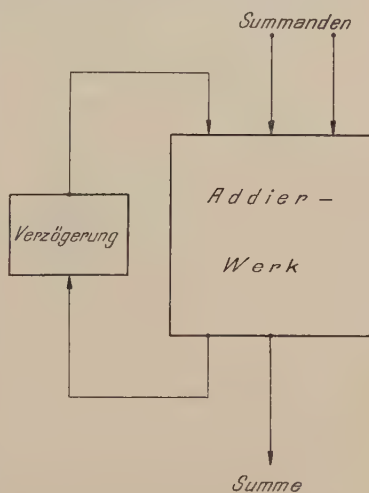


Fig. 25
Addierwerk in Serieschaltung.

erst dann richtig sein, wenn der Übertrag von der Stelle $i - 1$ her eingetroffen ist. Daher ist in einem solchen Addierwerk die Additionszeit gleich der Summe der Zeitkonstanten aller elementaren Addierwerke. Dies bewirkt eine empfindliche Verlangsamung des Rechenprozesses. In dieser Hinsicht sind die Kirchhoff-Addierwerke überlegen, da sich der Übertrag aufzubauen beginnt, bevor die Ziffernsumme vollständig gebildet ist.

Einen interessanten Sonderfall bilden die parallelen Addierwerke mit Relais. Ihre Zeitkonstante liegt, entsprechend der Ansprechzeit eines Relais, in

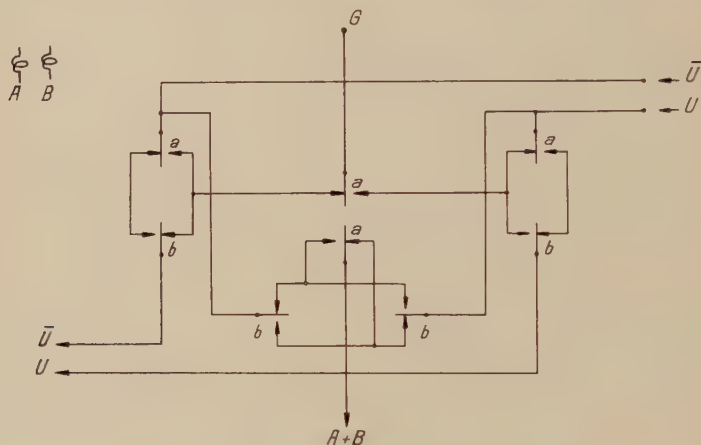


Fig. 26

Addierwerk mit elektromagnetischen Relais.

der Größenordnung von 10 ms. Es gibt nun eine Schaltung für das elementare Addierwerk, welche für die Verarbeitung des Übertrages keine Zeit benötigt, da ein von der vorhergehenden Stelle ankommender Übertrag nicht die Anziehung eines zusätzlichen Relais bewirkt, sondern lediglich gewisse Kontakte unter Spannung setzt. Fig. 26 veranschaulicht dies: A und B sind die zu addierenden dualen Ziffern; die Klemmen U und \bar{U} sind unter Spannung, wenn der Übertrag 0 bzw. 1 ist. Bei G ist die Spannungsquelle anzuschließen. — Die Additionszeit eines parallelen Addierwerkes mit beliebig großer Stellenzahl ist nach dieser Anordnung gleich der Ansprechzeit eines einzigen Relais.

Es ist eine allgemeine Tatsache, daß in einer parallel arbeitenden Maschine das Leitwerk bedeutend einfacher als in einer Seriemaschine wird; dadurch wird der Mehraufwand im Rechenwerk teilweise ausgeglichen. Außerdem ist eine Parallelmaschine übersichtlicher, und die Fehlersuche gestaltet sich einfacher. Falls ein geeigneter Speicher gefunden werden kann, so dürfte das parallel arbeitende Rechenwerk mehr und mehr den Vorzug erhalten.

Der Vollständigkeit halber ist hier noch beizufügen, daß auch auf dem Zählerprinzip arbeitende parallele Rechenwerke im Gebrauch sind. In mecha-

nischen Maschinen, wie zum Beispiel Mark I, gleichen sie den in Handrechenmaschinen verwendeten Zählern; in elektronischen Geräten sind es Röhrenzähler [49, 57].

5.24. Die Multiplikationstafel

Es wurde eingangs dieses Kapitels darauf hingewiesen, daß das Rechenwerk einer dezimalen Maschine im allgemeinen die Multiplikation durch wiederholte Addition ausführt. Gelegentlich findet man jedoch eine sogenannte Multiplikationstafel; dies ist eine Anordnung von Schaltröhren, welche von zwei dezimalen Ziffern direkt das Produkt bildet. Die Tafel besitzt somit zwei Eingänge für die beiden Faktoren und zwei Ausgänge, da das Produkt zweier Dezimalziffern im allgemeinen eine zweistellige Zahl ist. (Jeder dieser Ein- und Ausgänge besteht aus vier Anschlüssen, da die Ziffern dual verschlüsselt sind.) Die beiden Ausgänge liefern die Rechts- und die Linkskomponente des Produkts, zu dessen Summierung im allgemeinen zwei getrennte Addierwerke nötig sind (vgl. § 3.52). Die Multiplikationstafel beschleunigt den Vorgang der Multiplikation ganz erheblich.

Ein Beispiel einer solchen Anordnung ist in [19] beschrieben.

5.3. *Der Speicher*

5.30. Allgemeines

In einem Rechenautomaten ist es erforderlich, mehrere tausend Zahlen zu speichern, welche mit kurzer Suchzeit verfügbar sein müssen. Da eine Zahl aus 40–50 Dualstellen besteht, beläuft sich die geforderte Speicherkapazität auf 10^5 Ja-Nein-Werte oder höher. Im Gegensatz zu allen übrigen Teilen eines Rechenautomaten ist die Frage des Speichers bis heute als ungelöst zu betrachten; keines der bekannten Systeme erfüllt die Anforderungen bezüglich kurzer Suchzeit, Betriebssicherheit und annehmbarer Gestehungskosten in befriedigender Weise.

Unter der Suchzeit wird die Zeit verstanden, welche nach dem Ansteuern einer Speicherzelle vergeht, bis zu dem Zeitpunkt, da der Inhalt dieser Zelle ins Rechenwerk gegeben werden kann. Diese Suchzeit muß zur Rechenzeit in einem angemessenen Verhältnis stehen.

In diesem Kapitel werden nun neun Speicherverfahren, welche heute eine Bedeutung erlangt haben, beschrieben. Die sogenannten «äußeren Speicher», wie magnetische Bänder oder Lochstreifen, sind hier nicht enthalten, da sie in § 5.5 behandelt werden.

5.31. Der Zähler

In elektromechanisch arbeitenden Maschinen, zum Beispiel Mark I [1], werden die dezimalen Zähler gleichzeitig als Additionswerke und als Speicher

verwendet. Die auf diese Weise erreichbare Speicherkapazität ist recht beschränkt, da Umfang und Kompliziertheit einer Maschine ein gewisses Maß nicht überschreiten dürfen. Mark I besitzt 72 Zellen mit je 23 Dezimalen.

5.32. Das Relais

Relais mit Haltekontakten erfüllen ebenfalls die an einen Speicher gestellten prinzipiellen Anforderungen und finden in Maschinen wie Mark II [3] Verwendung. Auch hier ist die Kapazität auf etwa 100 Zahlen¹⁾ beschränkt.

Die Ansprechzeit betriebssicherer Relais kann heute noch nicht wesentlich unter 6 ms reduziert werden; diese Zeit ist also zum Schreiben mindestens erforderlich.

Die Ansteuerung einer Speicherzelle erfolgt mittels einer sogenannten Relaispyramide ([3], Seite 42). Es läßt sich zeigen, daß zur Auswahl von n Speicherzellen $n - 1$ Doppelkontakte benötigt werden, welche sich an $\log_2 n$ Relais befinden. Die Betätigungszeit dieser Pyramide muß ebenfalls mindestens zu 6 ms angenommen werden. Somit wird die totale Suchzeit des Relaisspeichers 6 ms für das Ablesen und 12 ms für das Speichern betragen.

5.33. Der Flip-Flop

Die vorstehend beschriebenen Speicher sind in ihrer Arbeitsweise langsam und eignen sich nicht für die heute verwendeten, hohen Rechengeschwindigkeiten. Unter Zuhilfenahme von Elektronenröhren läßt sich bezüglich der Suchzeit ein Faktor von 10000 gewinnen. Beispielsweise kann der in § 5.16 beschriebene Flip-Flop als Speicher einer einzelnen Dualstelle verwendet werden. In geeigneter Schaltung ist es möglich, einen Ja-Nein-Wert in weniger als 1 μ s zu speichern.

Das Ansteuern einer Speicherzelle kann wieder mit Hilfe einer Relaispyramide erfolgen; doch arbeitet diese im Vergleich zu den Flip-Flops unverhältnismäßig langsam. Dagegen lassen sich die Relaiskontakte der Pyramide durch Schaltröhren nach der Art von § 5.1 ersetzen (vgl. [5], Band 4, Kap. II, Seite 6), wodurch die Arbeitsgeschwindigkeit der Selektionsschaltung derjenigen des Speichers angepaßt ist.

In gewissen Fällen ist es zweckmäßig, an Stelle der Pyramide eine sogenannte Schaltmatrix zu verwenden, welche den gleichen Zweck erfüllt. Dieses Verfahren ist in [18] und [41] beschrieben.

Dieser Speicher genügt bezüglich seiner Arbeitsgeschwindigkeit und Suchzeit allen Ansprüchen; sein einziger Nachteil ist der hohe Materialverbrauch von zwei Röhren pro Dualstelle. Er kann daher nur in Maschinen von ganz kleiner Speicherkapazität, wie zum Beispiel ENIAC [39], [53], [57] verwendet

¹⁾ Unter «Zahl» wird hier stets eine vielstellige Zahl samt Vorzeichen verstanden.

werden. Dagegen gelangt der Flip-Flop in Rechenwerk und Leitwerk ausgiebig zur Verwendung, wo einzelne Zahlen oder Dualstellen kurzzeitig zu speichern sind.

5.34. Die Ultraschalleitung

Nach Vollendung des Rechenautomaten ENIAC entstand das Bedürfnis, mit geringerem Aufwand an Elektronenröhren und anderen Teilen einen Speicher mit einer Kapazität von mehreren tausend Zahlen herzustellen. Eine der ersten brauchbaren Lösungen bestand aus einem flüssigkeitsgefüllten Metallrohr mit einem Durchmesser von 1–2 cm und einer Länge von 50–100 cm; das Rohr ist an beiden Enden durch je einen Piezokristall abgeschlossen (Fig. 27). Am einen Kristall (in der Figur links) werden elektrische Impulse angelegt, welche in mechanische Kräfte verwandelt werden und sich der Flüssigkeit in Form von Schallwellen mitteilen; alsdann pflanzen sie sich in axialer Richtung fort und gelangen auf den zweiten Kristall, welcher wieder elektrische Impulse erzeugt. Diese Impulse sind stark geschwächt und gleichzeitig (infolge der Frequenzabhängigkeit der Übertragung) verformt. Sie werden daher durch einen Verstärker und einen Impulsformer geleitet. Daraufhin gelangen sie wieder an den Eingangskristall. Es ist ersichtlich, daß auf diese Weise eine einmal eingegebene Impulsfolge während beliebig langer Zeit zirkulieren kann und somit gespeichert ist; diese Folge besteht aus einer Reihe von Impulsen und Lücken, welche die Ziffern 1 bzw. 0 bedeuten. Die Anzahl der zu speichernden Impulse ist gleich der Laufzeit der Schallwellen im Rohr multipliziert mit der Impulsfrequenz und liegt für praktische Ausführungen in der Größenordnung von 1000.

Um eine gute Erhaltung der Impulsform zu gewährleisten, werden die Impulse einem Träger als Modulation aufgedrückt; die Frequenz dieses Trägers liegt etwa bei 15 Mc/s und ist gleich der Resonanzfrequenz der Kristalle. Empfängerseitig erfolgt eine Demodulation. Die Impulslänge beträgt 1 μ s oder weniger. Die an den Sendekristall anzulegende Spannung beträgt etwa 50 Volt; die Dämpfung infolge der Übertragung liegt bei 7 Neper, so daß empfängerseitig etwa 50 mV zur Verfügung stehen.

Die Piezokristalle sind aus Quarz. Die Flüssigkeit muß bezüglich ihrer akustischen Impedanz an den Quarz angepaßt sein, um Reflexionen zu vermeiden; diese Forderung wird durch Quecksilber erfüllt. An Stelle der Flüssigkeitssäule ist, wenn auch mit geringem Erfolg, die Verwendung eines Magnesiumstabes versucht worden.

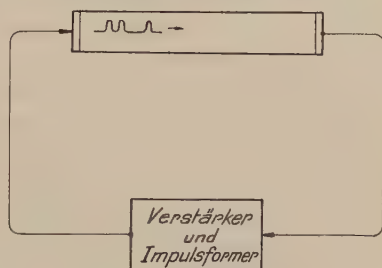


Fig. 27

Speicher mit Ultraschalleitung.

Ein vollständiger Speicher besteht aus beispielsweise 32 solcher Röhren. Es ist wichtig, daß die Laufzeit der Schallwellen in allen Röhren genau dieselbe ist, da sonst die gespeicherten Impulse ihren Synchronismus verlieren. Dies wird durch sorgfältige Reduktion des Temperaturgradienten innerhalb des Speichers erreicht. Oft werden auch mehrere Schallkanäle in einem einzigen Gefäß vereinigt [10], [55]; da der Piezoquarz als große Kolbenmembran wirkt, sind die Schallstrahlen eng gebündelt, und es entsteht kein Übersprechen. Gewisse Konstrukteure bringen sogar im Innern des Gefäßes Reflektoren an, so daß die Schallwellen auf einer Zickzackbahn mehrmals hin und hereilen. Dadurch wird erreicht, daß sich die Form des Quecksilberbehälters mehr derjenigen eines Würfels nähert, was wiederum eine Verringerung des Temperaturgefälles ermöglicht.

Die gespeicherten Informationen sind nur zur Zeit ihres Durchlaufes durch den Verstärker verfügbar, während sie für die Dauer ihrer Fortpflanzung als Schallwellen nicht zugänglich sind. Die Suchzeit kann somit gleich der vollen Laufzeit werden, welche in der Größenordnung von 1 ms liegt.

Die Löschung des Speichers geschieht dadurch, daß der Durchgang durch den Verstärker für die Dauer eines Umlaufes gesperrt wird.

Dieser Speicher eignet sich besonders für Seriemaschinen; er wird jedoch auch zusammen mit parallel arbeitenden Rechenwerken verwendet [55].

Eine einzelne Ultraschalleitung benötigt für Verstärkung, Impulsformung, Modulation usw. etwa 15 Vakuumröhren, so daß ein Speicher für 1000 Zahlen mit 500 Vakuumröhren gebaut werden kann.

Beschreibungen und Schaltungstechnische Angaben von solchen Speichern finden sich in [10], [41], [53], [55], [58]; [30] gibt eine ausführliche Darlegung der physikalischen Theorie und der konstruktiven Details.

5.35. Magnetische Trommeln

Dieser Speicher besteht aus einer rotierenden Trommel, welche mit einer dünnen, magnetisierbaren Schicht bedeckt ist; auf dieser Schicht werden die zu speichernden Ja-Nein-Werte in Form von magnetischen Dipolen aufgezeichnet. Fig. 28a zeigt die entsprechende Anordnung. Es ist ersichtlich, daß die Dipole radiale Richtung haben.

Die Aufzeichnung erfolgt durch einen Strom von einigen Mikrosekunden Dauer, welcher durch die Spule des Magnetkopfes geleitet wird; dem Wert 0 entspricht ein negativer, dem Wert 1 ein positiver Impuls, entsprechend Fig. 28b. Die Ablesung erfolgt mit demselben Magnetkopf. Die induzierte Spannung ist die zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses im Eisenkern; sie ist in Fig. 28c dargestellt.

Von Wichtigkeit ist es, diesen Spannungsverlauf richtig zu deuten, das heißt, ihn in eine Folge statischer Spannungen zu verwandeln, welche im

Rechenwerk verwendet werden können. Es gibt hierfür verschiedene Methoden; die vorteilhafteste scheint ein mit «sampling» (Ausblenden) bezeichnetes Verfahren zu sein, welches darin besteht, daß während jedes Impulses zu einer fest bestimmten Zeit (in der Figur durch Pfeile angedeutet) die Polarität der abgegebenen Momentanspannung ermittelt wird, welche einen Flip-Flop entspre-

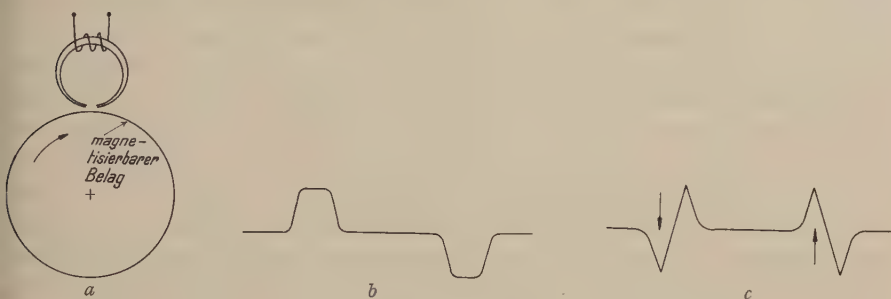


Fig. 28

Speicherung auf einem Magnetbelag.

chend steuert. Das Ausblenden dieses Momentanwertes erfolgt durch ständig vorhandene Uhrimpulse (clock pulses), welche eine Schallröhre kurzzeitig öffnen. Diese Impulse sind in Form von lauter gleichsinnigen Dipolen auf einem gesonderten Umfang der Trommel aufgezeichnet; sie werden von dort ebenfalls mit Hilfe eines Magnetkopfes abgelesen, verstärkt und in annähernd rechteckige Form gebracht. (Ein einziger Impulsgenerator dieser Art genügt, um Uhrimpulse für den ganzen Speicher zu liefern.) — Dieses Verfahren ist in [5] beschrieben, und ein ähnliches findet sich in [17]. Andere Vorschläge gehen dahin, die Uhrimpulse durch die gespeicherten Informationsimpulse selbst zu erzeugen, welche vor dem Ausblenden künstlich verzögert werden.

Von der «sampling»-Methode grundsätzlich abweichend sind Verfahren, die zur Unterscheidung von 0 und 1 die abgelesenen Impulse differenzieren oder integrieren. Damit ist jedoch der Nachteil einer Anfälligkeit gegenüber Amplitudenänderungen verknüpft.

Ein eigentliches Löschen dieser Magnetisierung ist nicht vorgesehen; der magnetische Fluß beim Schreiben wird so stark gewählt, daß die Oberfläche der Trommel vollständig gesättigt wird. Wenn nun ein Dipol geschrieben wird, so wird ein bereits an derselben Stelle befindlicher Dipol völlig überdeckt, falls er umgekehrtes Vorzeichen hatte. Es ist jedoch wichtig, daß die Magnetisierungen mit größter Genauigkeit an derselben Stelle vorgenommen werden, ansonst Überlagerungen entstehen, die die Ablesung verunmöglichen.

Die erreichbare räumliche Dichte der Impulse auf der Trommel hängt stark von der Formgebung des Magnetkopfes ab. Die Breite in axialer Richtung beträgt im allgemeinen 3–4 mm; doch verwendet WILLIAMS Kanalbreiten von

weniger als 1 mm. Die Impulslänge in tangentialer Richtung wurde von AIKEN [5] mit großer Sicherheitsmarge auf 2,5 mm festgesetzt; doch gehen BIGELOW [13] und andere bis $1/3$ mm herunter. Es ist also möglich, pro Quadratmeter Trommeloberfläche bis zu $3 \cdot 10^6$ Ja-Nein-Werte zu speichern; bis jetzt im Betrieb befindliche Maschinen zeichnen aber pro Quadratmeter nur etwa 10^5 Impulse auf (Mark III von AIKEN). Die dort verwendeten Magnetköpfe gleichen denjenigen, welche heute zur Schallaufzeichnung auf Tonbändern mit Eisenoxydbelag im Gebrauch sind. Sie besitzen zwei Wicklungen von verschiedenem Wicklungssinn und einer Induktivität von je 3–4 mH; die Größe des Luftspaltes im Eisenkern beträgt 0,07 mm, und in der gleichen Größenordnung liegt der Abstand des Magnetkopfes von der Trommeloberfläche. Die hohe Induktivität beschränkt die Impulsfrequenz, die zur Aufzeichnung verwendet werden kann; AIKEN verwendet 30 kc/s. Die durch die Dipole in diesen Magnetköpfen induzierte Spannung, welche zur Ablesung verwendet wird, liegt zwischen 50 und 100 mV; ihre Verstärkung bereitet keine besonderen Schwierigkeiten.

BIGELOW [13], BOOTH [17] und andere verwenden an Stelle eines Magnetkopfes einen einzelnen, sehr dünnen Draht mit einer Länge von etwa 1 mm, welcher in axialer Richtung überaus nahe entlang der Trommel verläuft. Er verursacht ein magnetisches Feld, welches prinzipiell gleich wie das in Fig. 28a gezeigte verläuft; zur Sättigung der Trommeloberfläche ist in diesem Fall eine Stromstärke von 10–20 A erforderlich. Infolge der niedrigen Impedanz der Anordnung können außerordentlich kurze Impulszeiten verwendet werden; immerhin sind zur Erzeugung der hohen Stromstärken besondere Schaltungen erforderlich. Die zum Zwecke der Ablesung in diesem Draht induzierte Spannung ist sehr klein, doch läßt sie sich durch Zwischenschaltung eines Transformators etwas erhöhen, bevor sie auf einen Verstärker gegeben wird. Mit dieser Anordnung kann eine Impulsfrequenz bis zu 100 kc/s verwendet werden.

Impulsfrequenz, Umfangsgeschwindigkeit und Impulsdichte sind miteinander verknüpft: AIKEN verwendet Trommeln von 20 cm Durchmesser, welche mit 7200 Umdrehungen pro Minute rotieren; doch entstehen dadurch bereits konstruktive Probleme schwieriger Art. Die Trommeln bestehen aus massivem Aluminium. Für die magnetische Oberfläche, deren Dicke 0,01 bis 0,03 mm beträgt, kann entweder eine galvanisch aufgetragene Nickelschicht verwendet werden oder dann eine aufgespritzte Suspension von Eisenoxyd; solches Material wird neuerdings zur Verwendung auf Tonbändern in großen Mengen hergestellt. Ersteres Verfahren wird in England, letzteres in Amerika bevorzugt.

Da ein Speicher oft mehrere hundert Magnetköpfe verwendet, stellt sich hier wieder das Problem, im Verlaufe eines Rechengvorganges den gewünschten auszulesen. Dies geschieht mit Hilfe von Relais oder, falls ein schnelleres Arbeiten erwünscht ist, durch Schaltröhren. Immerhin sind die zum Schreiben benötigten Ströme im allgemeinen zu hoch, als daß sie durch Schaltröhren

gesteuert werden könnten, so daß für jeden Schreibkopf eine gesonderte Röhre erforderlich ist.

Für den Erbauer eines Rechengerätes sind die folgenden Eigenschaften dieser Art von Speicher charakteristisch: Die Suchzeit ist gleich einer Umdrehungszeit und kann somit nicht wesentlich unter 10 ms herabgesetzt werden (außer durch Anbringung mehrerer Magnetköpfe entlang einem Umfang, was aber vielerlei Nachteile mit sich bringt); die Impulsfrequenz ist auf etwa 100 kc/s beschränkt; die mechanische Fertigung ist teuer; die Arbeitsweise ist sehr zuverlässig und betriebssicher; die erreichbare Speicherkapazität ist groß; die Speicherung bleibt nach Ausschaltung der Stromquellen erhalten.

5.36. Das Selectron

Dieser Speicher wurde vom Erfinder RAJCHMAN erstmals 1946 beschrieben [39]. Die Speicherung beruht auf der bekannten Tatsache, daß eine durch einen Kathodenstrahl bombardierte isolierende Schicht zwei stabile Potentiale annehmen kann, nämlich dasjenige der Kathode sowie dasjenige der beschleunigenden Elektrode (Anode). Im ersten Fall sorgen die auftretenden langsamen Elektronen für Aufrechterhaltung des Potentials; im zweiten Fall lösen die schnellen Elektronen eine Sekundäremission aus, und das stabile Potential stellt sich ein, sobald der Faktor der Sekundäremission gleich 1 ist.

Das Selectron nach dem ursprünglichen Vorschlag [39], [45] besitzt eine stabförmige Kathode, welche von der zylinderförmigen isolierenden Schicht (Schirm) umschlossen ist. Dazwischen liegt die beschleunigende Elektrode (Kollektor) in Form eines zylindrischen Gitters. Auf dem Schirm werden nun diskrete Felder ausgeblendet, und zwar mit Hilfe zweier orthogonaler Scharen von Stäben, die zwischen Kathode und Kollektor angebracht sind. Diese sind nach elektronenoptischen Gesichtspunkten so geformt, daß der Elektronenstrom nur dann durch ein Fenster treten kann, wenn alle vier begrenzenden Stäbe positives Potential haben. Durch geschickte kombinatorische Verbindung der Stäbe ist es ermöglicht, daß nur relativ wenig Zuleitungen aus dem Glaskolben zu führen sind. So kann mit Hilfe von nur 18 Anschlüssen ein beliebiges von 256 Fenstern geöffnet werden.

Normalerweise sind alle Fenster geöffnet, wodurch der Elektronenstrom auf den ganzen Schirm freigegeben ist; dadurch ist der Ja-Nein-Wert in jeder Zelle auf beliebig lange Zeit gespeichert. Zum Schreiben und Ablesen ist noch eine weitere Elektrode, die Signalelektrode, vorgesehen, welche auf der Rückseite (also außerhalb) des isolierenden Schirms angebracht ist und somit kapazitiv mit der Schirmoberfläche gekoppelt ist. Um nun eine 0 oder eine 1 in eine bestimmte Zelle einzuschreiben, werden alle Fenster außer dem gewünschten geschlossen; dann erhält die Signalelektrode einen abrupt ansteigenden, aber langsam absinkenden negativen (oder positiven) Spannungstoß. Dadurch werden die Potentiale aller Zellen mitgenommen, kehren aber wieder auf ihren

Ausgangswert zurück, mit Ausnahme der gewünschten Zelle, in welcher die Zu- oder Abfuhr von Elektronen den Verschiebungsstrom aufwiegen kann.

Die Ablesung geschieht auf ähnliche Weise, indem das Vorhandensein eines Verschiebungsstromes in der Signalelektrode festgestellt wird. Die zum Schreiben oder Ablesen benötigte Zeit beträgt einige Mikrosekunden. Der Speicher eignet sich somit für einen außerordentlich schnellen Rechenautomaten. — In einer einzelnen Röhre können 256 Ja-Nein-Werte gespeichert werden.

Es ist noch kein Rechenautomat unter Verwendung des Selectrons gebaut worden. Der heutige Stand der Entwicklung weicht etwas von den gegebenen Beschreibungen ab, doch sind darüber keine Veröffentlichungen vorhanden.

5.37. Die Kathodenstrahlröhre als Speicher

Der Leuchtschirm einer Kathodenstrahlröhre ist eine isolierende Schicht, von welcher vorhandene Ladungen nur langsam abfließen können; die Zeitkonstante dieser Entladung beträgt etwa 0,2 s. Wenn es somit gelingt, Punktladungen auf einem Leuchtschirm vor ihrem vollständigen Abklingen abzulesen und zu erneuern, so ist damit ein Speicher für 1000 oder mehr Ja-Nein-Werte geschaffen.

F. C. WILLIAMS [63] verwendet eine gewöhnliche Kathodenstrahlröhre und löst das Problem der Unterscheidung von 0 und 1 sowie des Schreibens und des Ablesens wie folgt: Außerhalb des Leuchtschirms ist eine Platte angebracht, welche dadurch mit dem Schirm kapazitiv gekoppelt ist; sie ist mit dem Eingang eines Verstärkers verbunden. Soweit ähnelt die Anordnung einem Ikonoskop. Eine 0 wird nun geschrieben, indem der Elektronenstrahl für kurze Zeit auf einen Punkt gerichtet wird. Dadurch entsteht infolge der Sekundäremissions-Eigenschaften des Schirms im Zentrum eine positive Ladung, welche von einem Wall negativer Ladung umgeben ist. Der Mittelpunkt dieser Konfiguration ist als Sitz der Speicherung zu betrachten, und das Vorzeichen der Ladung an dieser Stelle ist das Kriterium für die gespeicherte Ziffer. Soll eine 1 geschrieben werden, so wird, wie vorher, der Strahl kurzzeitig auf den betreffenden Punkt gerichtet, kurz danach aber auf eine benachbarte Stelle, die etwa um einen Strahldurchmesser entfernt liegt. Der «Wall» dieser zweiten Operation wird die positive Ladung am Speicherrand in eine negative verwandeln.

Die Ablesung geschieht dergestalt, daß der Elektronenstrahl in Richtung auf den Speicherpunkt eingeschaltet wird; dadurch entsteht in der mit dem Schirm kapazitiv gekoppelten Platte ein Verschiebungsstrom, dessen Vorzeichen vom Vorzeichen der Ladung an dieser Stelle und somit von der gespeicherten Ziffer abhängt.

Es wurde darauf hingewiesen, daß die aufgebrachten Ladungen allmählich abfließen; die gespeicherten Werte müssen daher periodisch erneuert werden. Zu diesem Zweck wird in zyklischer Folge ein Wert nach dem andern abgelesen

und sofort neu eingeschrieben. Soll ein Wert zur Verwendung im Rechenggerät abgelesen werden, so wird der Regenerationszyklus für die Dauer dieser Operation unterbrochen.

In der Anordnung von WILLIAMS werden auf einem Schirm 1024 Werte gespeichert; die Regeneration oder Ablesung eines Wertes dauert etwa $1 \mu\text{s}$. Somit kann der ganze Inhalt pro Sekunde 1000mal regeneriert werden, was gegenüber dem Abfließen der Ladung eine weite Sicherheitsmarge darstellt.

Die Suchzeit ist gegenüber der Ablesezeit verschwindend kurz, da der Kathodenstrahl sehr schnell von einer Stelle zur andern abgelenkt werden kann. Dieser oft mit «Williams Tube» bezeichnete Speicher eignet sich somit für die schnellsten heute im Bau befindlichen Rechenautomaten.

Die zur beschriebenen Anordnung gehörenden elektrischen Schaltungen sind überaus kompliziert und haben bis jetzt noch nicht den gewünschten Grad von Betriebssicherheit erreicht. Es wird jedoch an verschiedenen Stellen in England und Amerika eine rege Entwicklungstätigkeit betrieben, und es ist zu erwarten, daß dieser Speicher eine Rolle von zunehmender Wichtigkeit spielen wird.

Eine ähnliche Anordnung ist von HAEFF [25] vorgeschlagen worden.

5.38. Magnetische Speicherung in diskreten Zellen

Von den Eigenschaften der magnetischen Hysterese kann, neben der in § 5.35 beschriebenen punktwisen Magnetisierung einer homogenen Schicht, auch in der Weise Gebrauch gemacht werden, daß in einem ringförmigen Eisenkern ein positiver oder negativer Fluß induziert und dadurch gespeichert wird. Hiefür eignet sich insbesondere eine neue Legierung von Eisen und Nickel, welche eine nahezu rechteckige Hysteresiskurve besitzt; sie trägt die Markenbezeichnung «Deltamax». Nach einem Vorschlag von AIKEN, der in [5] und [64] beschrieben ist, werden Ringkerne mit einem Durchmesser von 2 cm und einer Dicke von nur 0,05 mm verwendet, welche drei Wicklungen tragen. In dieser Anordnung ist es möglich, den in einer solchen Einheit gespeicherten Ja-Nein-Wert durch einen von außen eingegebenen Impuls auf eine nächste Einheit zu übertragen; werden viele Einheiten zu einem Ring zusammengeschlossen, so kann dadurch eine Gruppe von Ja-Nein-Werten beliebig lange zirkulieren. Die Geschwindigkeit dieser Zirkulation ist durch die Frequenz der eingegebenen Impulse bestimmt und kann beliebig verändert oder gleich Null gemacht werden. Die Zusammenschaltung erfordert keine Elektronenröhren.

Diese Anordnung ist nicht als Speicher großer Kapazität gedacht, sondern als Register in einem Rechenwerk, wo eine Verschiebung mit variabler Geschwindigkeit vorgenommen werden muß, und ebenso als Übergang von Rechenwerk zu Druckwerk oder von Eingang zu Rechenwerk.

Die höchste verwendbare Impulsfrequenz beträgt 30 kc/s; somit ist dieser Speicher für sehr schnelle Maschinen nicht geeignet. Es ist jedoch anzunehmen,

daß im Verlaufe weiterer Entwicklungsarbeiten auch größere Geschwindigkeiten erzielt werden können.

Dieser Speicher zeichnet sich durch große Einfachheit und Betriebssicherheit aus.

5.39. Chemische Speicherung

BOWMAN (Pittsburg) wies 1949 auf die Möglichkeit hin, Ja-Nein-Werte in chemischen Zellen zu speichern [53]; solche Zellen ähneln im Prinzip einem Akkumulator. BOWMAN beschreibt drei verschiedene Prinzipien, die zur Verwendung kommen können; in jedem Fall haben die verwendeten Zellen sehr kleine Ausmaße (Größenordnung 1 mm) und sind überaus einfach gebaut, so daß in einem Speicher leicht 10^5 oder gar 10^6 Zellen verwendet werden können. Eine Schwierigkeit bildet die Auswahl der gewünschten Zelle. Ferner sieht man vorerst noch keine Möglichkeit, die zum Schreiben benötigte Zeit wesentlich unter 1 ms zu reduzieren.

Dieser Speicher befindet sich in den ersten Anfängen der Entwicklung, und es ist vorläufig nicht vorherzusagen, ob er eine Bedeutung erlangen wird.

5.4. Das Leitwerk

Wie in § 2 dargelegt wurde, dient das Leitwerk dazu, die Befehle in der richtigen Reihenfolge aus dem Befehlsspeicher abzulesen und danach in den übrigen Teilen des Rechenautomaten die nötigen Operationen auszulösen. Das Leitwerk zerfällt somit in Befehlsspeicher und Operationssteuerung.

Die Befehle können in einem gesonderten Speicher registriert sein, oder es kann hierfür der auch für die Zahlen verwendete Speicher herangezogen werden. Die beiden Fälle geben dem Leitwerk einen unterschiedlichen Charakter und werden hier getrennt behandelt.

5.41. Der gesonderte Befehlsspeicher

Die zuerst verwendete Methode zur Speicherung von Befehlen war ein Lochstreifen, von welchem die Befehle in der vorgegebenen Reihenfolge abgetastet werden. Die Abtastung kann ähnlich dem in Fernschreibereinrichtungen verwendeten Verfahren erfolgen [1], [3]. Sollen neben dem Hauptrechenplan auch Unterpläne verwendet werden, so werden mehrere Abtaster vorgesehen, die durch Befehle im Hauptplan aufgerufen werden. Diese Pläne können nach Wunsch zyklisch sein, indem sie einen endlosen Lochstreifen verwenden, der auf einem Gestell aufgespannt ist und damit eine Länge bis zu 50 oder 100 m haben kann. Ein nichtzyklischer Rechenplan wird auf eine Rolle aufgewickelt und kann somit in fast beliebiger Länge gefertigt werden.

Dieser Befehlsspeicher ist jedoch in seiner Arbeitsgeschwindigkeit beschränkt, indem selbst bei sorgfältigster mechanischer Ausführung pro Sekunde nicht mehr als etwa 500 Ja-Nein-Werte abgetastet werden können, was etwa

25 Ein-Adreß-Befehlen entspricht. Ferner ist die Suchzeit für einen beliebigen, nicht in der Reihenfolge liegenden Befehl sehr lange, so daß Sprungbefehle nur bei kurzen Rechenplänen angewendet werden können. (Dieser Nachteil wird durch Verwendung einer größeren Zahl von Abtastern allerdings bis zu einem gewissen Grade kompensiert; doch bleibt der Anwendungsbereich eines solchen Befehlsspeichers auf langsame Maschinen beschränkt.)

Die Verwendung von magnetischen Bändern an Stelle von Lochstreifen mildert die erwähnten Einschränkungen etwas, läßt sie aber prinzipiell bestehen. Eine wesentliche Verbesserung der Situation entsteht jedoch, sobald die Befehle in einen Speicher gemäß § 5.3 gegeben werden, wodurch Ablese- und Suchzeit fast beliebig verkürzt werden können und somit auch mit größten Rechengeschwindigkeiten Schritt halten. So besitzt der Rechenautomat Mark III [4], [53] eine gesonderte magnetische Trommel zur Speicherung der Befehle, deren Suchzeit der Rechengeschwindigkeit genau angepaßt ist.

In diesem Abschnitt muß noch das Verfahren der Speicherung von Befehlen in Form einer Verdrahtung erwähnt werden. Der in [1] beschriebene Rechenautomat Mark I verwendet für kurze Unterpläne Schrittschalter, wobei jeder Schritt einem Befehl entspricht; jeder Befehl wird vor Beginn der Rechnung durch Einstecken von Kabeln festgelegt. Auch eine feste Verdrahtung für oft gebrauchte Unterpläne ist verwendbar. In ähnlicher Weise arbeitete früher das Leitwerk des ersten elektronischen Rechenautomaten, ENIAC [57].

5.42. Befehle im Zahlenspeicher

Nach dem heute bevorzugten Verfahren werden Befehle und Zahlen, welche dann die gemeinsame Benennung «Wort» tragen, im selben Speicher gespeichert. Im allgemeinen bietet eine Speicherzelle Raum für einen oder zwei Befehle. Das Leitwerk besitzt nun zwei Arbeitsphasen; in der ersten wird der nächste Befehl dem Speicher entnommen, und in der zweiten wird die befohlene Operation ausgeführt, was im allgemeinen wieder die Entnahme einer Zahl aus dem Speicher bedingt. Vom Speicher müssen somit die Wörter sowohl zum Leitwerk als auch zum Rechenwerk fließen können. Die Zelle, aus der nun der nächste Befehl zu entnehmen ist, wird durch einen Zähler gekennzeichnet, dessen Inhalt nach jeder Operation um 1 erhöht wird¹⁾. Ein Sprungbefehl veranlaßt, daß eine neue Zahl in diesen Zähler eingegeben wird.

Diese Art der Befehlsspeicherung gewährleistet eine gute Ausgeglichenheit der Rechenzeiten, der Suchzeiten für die Befehle und der für einen Sprung benötigten Zeit; ferner bieten sich dem Mathematiker bedeutende Möglichkeiten in der Planfertigung, was in § 4.6 ausführlich besprochen ist. Dagegen wird der Rechenprozeß etwas verlangsamt, weil dem Speicher nach jeder Operation ein neuer Befehl entnommen werden muß.

¹⁾ Im Falle von 4-Adreß-Befehlen (siehe § 4.51) ist das Verfahren abweichend.

5.43. Die Operationensteuerung

Die dem Speicher entnommenen Befehle enthalten eine oder mehrere Adressen sowie einen Operationsbefehl. Im allgemeinen sind etwa 20 verschiedene Operationsbefehle möglich; sie werden mittels einer Pyramide oder einer Matrix (vgl. § 5.32 und 5.33) entschlüsselt. Daraufhin wird eine für jede Operation gesondert vorhandene Schaltung angesteuert, welche ihrerseits im Rechenwerk die zugehörigen Funktionen auslöst, das heißt insbesondere Schaltröhren öffnet und schließt. Für die Ausführung dieser Schaltung besteht eine große Fülle von Möglichkeiten, und jeder Konstrukteur wird eine individuelle Lösung finden. Das zentrale Glied ist meist ein *Ring* (vgl. § 5.16) oder ein Zähler, welcher in bestimmten Abständen vorgerückt wird und in jeder Stellung gewisse Schaltröhren betätigt.

In der Fertigung des Rechenplanes spielen die bedingten Befehle (vgl. § 4.3) eine bedeutende Rolle. Deren schaltungstechnische Realisierung ist durchaus trivial und braucht kaum erwähnt zu werden; denn sie besteht lediglich aus einer Anordnung von Schaltröhren am Eingang der Steuerung der betreffenden Operation.

5.5. Eingang und Ausgang

Ein- und Ausgang stellen die Verbindung des Rechenautomaten mit der Außenwelt dar; ferner kann der Lochstreifen oder das magnetische Band, falls Ein- und Ausgang mit solchen arbeiten, als Träger der sogenannten äußeren Speicherung (vgl. § 2.2) verwendet werden. Andererseits wird auf die Verwendung eines solchen Bindegliedes oft verzichtet.

Falls Befehle und Zahlen in einem getrennten Speicher untergebracht sind, ist meist für beide ein gesonderter Eingang vorgesehen.

5.51. Direkter und indirekter Ein- und Ausgang

Die einfachste Art des Einganges ist eine Tastatur, welche Zahlen direkt ins Rechenwerk oder in den Speicher gibt. Dieses Verfahren genügt bezüglich der Schnelligkeit und der Fehlersicherheit nur bescheidensten Ansprüchen; jedoch ist es als zusätzliche Einrichtung zur Ausführung von Kontrolloperationen oder kurzen Rechnungen in jeder Maschine sehr zweckmäßig.

Die analoge Form des Ausganges ist ein Lampenfeld, welches optisch abgelesen wird; hierzu ist dasselbe zu bemerken wie zur Tastatur. — Weit leistungsfähiger ist die Verwendung einer elektrischen Schreibmaschine, da eine solche 10–15 Ziffern pro Sekunde drucken kann. Im allgemeinen werden handelsübliche Modelle verwendet, und es werden Zugmagnete zur Betätigung der Tasten angebracht. Diese Magnete ihrerseits werden in geeigneter Weise durch die im Rechenwerk oder in einem gesonderten Register enthaltenen Zahlen gesteuert. Der Befehl zum Drucken wird in den Rechenplan einbezogen.

Für einen schnell arbeitenden Rechenautomaten ist jedoch auch dieses Verfahren noch nicht zweckmäßig; denn im Verlaufe der Lösung eines Problems fallen oft in kurzer Zeit zahlreiche Resultate an, während andere Perioden wieder ausschließlich der Berechnung dienen und keine Resultate ergeben. Da nun das Drucken immerhin eine gewisse Zeit beansprucht, so sind sowohl Rechenautomat als auch Druckwerk schlecht ausgenützt. Die beste Lösung ist daher die Zwischenschaltung eines speichernden Mediums, welches eine beliebige Menge von Resultaten aufnehmen kann, die alsdann nach Bedarf im Druckwerk reproduziert werden. Dieser Prozeß ist unabhängig vom Arbeiten des Rechenautomaten und kann vom Bedienungspersonal so organisiert werden, daß die vorhandenen Apparate bestmöglich ausgenützt sind. Dasselbe Medium kann zur Aufzeichnung der in das Rechenggerät einzugebenden Zahlen verwendet werden; die Aufzeichnung erfolgt ebenfalls an einem vom Rechenggerät gesonderten Apparat.

Für diesen Zweck kommen Lochstreifen oder magnetische Impulsträger in Betracht.

5.52. Lochstreifen

Wie bereits bei der Besprechung des Leitwerks erläutert wurde, können Lochstreifen als Träger numerischer Informationen verwendet werden. Oft werden diese im Verein mit den handelsüblichen Fernschreibereinrichtungen verwendet; diese sind in der Lage, pro Sekunde 5–10 Ziffern zu stanzen oder abzutasten. Zur Übertragung der Eingangswerte für eine Berechnung erfolgt die Lochung durch einen sogenannten Handstanzer, der zur Bedienung eine Tastatur besitzt; die gelochten Streifen werden alsdann durch das Rechenggerät abgetastet. Die Resultate andererseits gelangen auf einen durch das Rechenggerät gesteuerten Locher; die Resultatstreifen können alsdann auf einen mit einer Schreibmaschine kombinierten Abtaster gegeben werden, welcher ebenfalls einen Teil der Fernschreibereinrichtungen darstellt, oder sie können wieder dem Rechenggerät zugeführt werden (bei Verwendung als äußerer Speicher).

Der Vorteil dieses Verfahrens besteht in seiner guten Betriebssicherheit sowie in der Verwendungsmöglichkeit handelsüblicher Apparate; doch ist die Schreib- und Abtastgeschwindigkeit für viele Zwecke ungenügend.

Lochstreifen werden häufig durch Lochkarten ersetzt oder ergänzt, welche in ähnlicher Weise verwendet werden.

5.53. Magnetische Impulsträger

Bedeutend höhere Geschwindigkeiten erzielen magnetische Impulsträger in Form von dünnen Stahldrähten oder von Papierbändern mit einer Eisenoxyd-belegung. (Solche Medien finden heute in der Tonaufzeichnung eine vielseitige Verwendung.) Die Aufzeichnung erfolgt in Form von Impulsen und gleicht im

wesentlichen dem in § 5.35 beschriebenen Verfahren; auch die zur Verwendung gelangende Schaltungstechnik ist prinzipiell dieselbe. Es ist jedoch zu beachten, daß hier die Magnetköpfe den Impulsträger unmittelbar berühren und daher etwas anders gestaltet sind. Daher kann auch die Impulsdichte erhöht werden, und es ist leicht möglich, 2–4 Impulse pro Millimeter aufzuzeichnen.

Soll auf einen Befehl hin jeweils eine einzelne Zahl abgelesen werden, so muß der Tonträger in kurzer Zeit auf seine volle Geschwindigkeit von 100 oder gar 200 cm/s beschleunigt und nach Durchlaufen einer Strecke von etwa 2 cm, also nach weniger als 10 ms, wieder abgebremst werden. Dies stellt nicht nur an die Zerreißfestigkeit des Trägers selbst erhebliche Anforderungen, sondern erheischt die Konstruktion komplizierter Antriebe mit magnetischen Kupplungen. Dieses Problem ist auf mannigfache Weise gelöst worden (siehe zum Beispiel [4]), doch scheint bisher keine wirklich befriedigende Ausführung vorzuliegen. Etwas günstiger liegt die Situation, wenn jeweils ganze Gruppen von Zahlen abgelesen werden, da in diesem Fall eine so scharfe Beschleunigung nicht erforderlich ist.

Magnetische Impulsträger können nach Gebrauch gelöscht und fast beliebig oft wiederverwendet werden.

Beitrag zur Statik des Balkens von endlicher Breite

(Statik plattenartiger Träger)

Von H. SCHÜRCH, Zürich¹⁾

(Schluß²⁾)

7. Näherungslösung mit Hilfe des Regelflächenansatzes

Das im vorhergehenden Abschnitt skizzierte Vorgehen soll hier unter vereinfachten Voraussetzungen durchgeführt werden.

Betrachtet werde zunächst ein «orthotroper Schichtträger» gemäß (5a). Der Verformungsansatz sei auf die beiden ersten Glieder «Durchsenkung und Verdrehung» reduziert:

$$\underline{w = f_0 + \gamma f_1}, \quad (6a)$$

das heißt die elastische Fläche des Trägers soll eine Regelfläche sein, deren erzeugende Gerade parallel zur (y, z) -Ebene verlaufe (Fig. 6). Von der Eigenverformung des Querschnittes (Querschnittsverformung) wird zunächst abgesehen.

¹⁾ Institut für Flugzeugbau an der ETH.

²⁾ Erster Teil der Arbeit siehe ZAMP 2, 26 (1951).

Mit dem reduzierten Ansatz (6a) ergibt sich aus der Verformungsdifferentialgleichung (5a) die fiktive Belastung \bar{p}_{xy} zu

$$\bar{p}_{xy} = [k_x (f_0'' + y f_1'')]'' + 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial k}{\partial y} f_1' \right]' + \mu \left[\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} (f_0'' + y f_1'') + 2 \frac{\partial k}{\partial y} y f_1' \right]. \quad (7a)$$

Der Operator $\partial/\partial x$ soll im folgenden durch den Akzent ' abgekürzt werden.

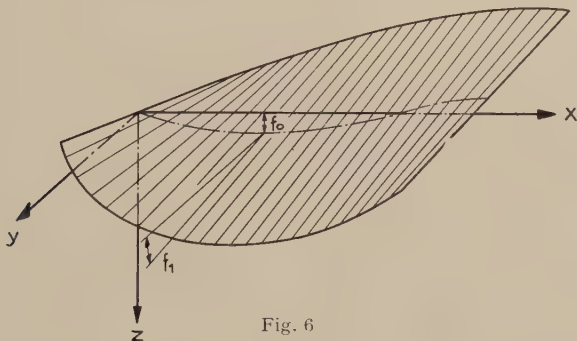


Fig. 6

Fig. 7 zeigt einen quer zur Längsachse aus dem Träger geschnittenen Streifen von der Breite $dx = 1$ mit der Flächenbelastung p_{xy} , welche in einen Anteil \bar{p}_{xy} gemäß (7a) und einen zunächst vernachlässigten Anteil g_{xy} aufgeteilt gedacht wird. Es ist dabei zu beachten, daß die Funktionen \bar{p}_{xy} und g_{xy} an den Unstetigkeitsstellen der Steifigkeitsverteilung Pole aufweisen. Das bedeutet, daß die Flächenlasten sich an diesen Stellen zu konzentrierten Linienbelastungen, Einzelkräften und Momenten «verdichten».

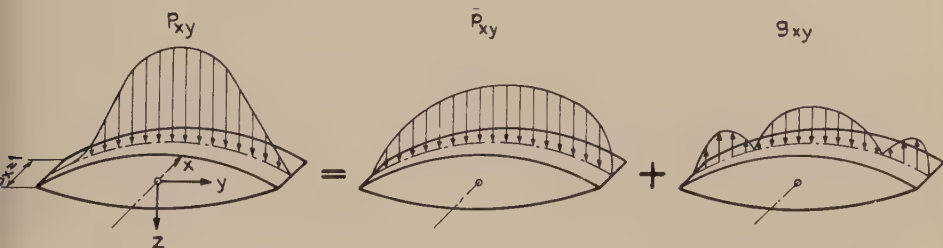


Fig. 7

Aufteilung der Belastung p_{xy} in einen nichtquerverformenden Anteil \bar{p}_{xy} und in ein querverformendes Gleichgewichtssystem g_{xy} .

Durch Integration der Belastung \bar{p}_{xy} über einen Querstreifen des Trägers von der Breite $dx = 1$ (Fig. 8) erhält man die resultierende Querbewertung

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy} dy = \int_{\eta_2^-}^{\eta_1^+} \bar{p}_{xy} dy = (f_0'' K_{x_0})'' + (f_1'' K_{x_1})'' \quad (8a)$$

und die auf die x -Achse bezogene Torsionsbelastung

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{xy} dy = \int_{\eta_2}^{\eta_1} \bar{p}_{xy} dy = (f_0'' K_{x_1})'' + (f_1'' K_{x_2}) - (f_1' L_0)' . \quad (9a)$$

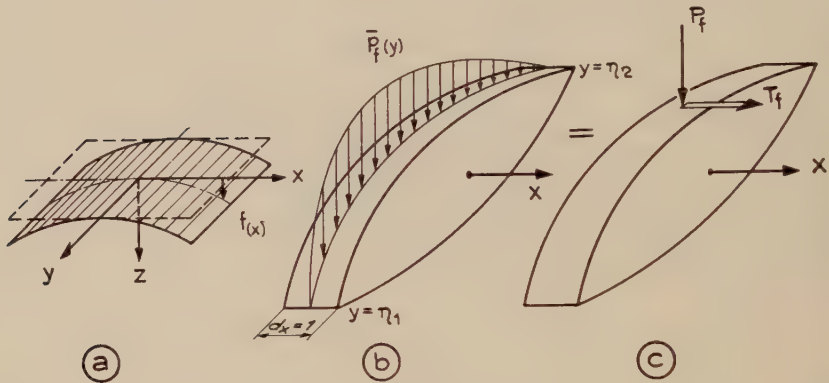


Fig. 8

Krümmung des Schichtträgers.

a Elastische Fläche, b zugehörige Belastung, c resultierende Quer- und Torsionslast.

Dabei bedeuten

$$K_{x_0} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} k_x dy = \frac{E}{1 - \mu^2} \int_F \int z^2 dy dz + E_{x_0} \int_{F_{x_0=0}} \int z^2 dy dz \text{ [kg cm}^2\text{]} ,$$

$$K_{x_1} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} y k_x dy = \frac{E}{1 - \mu^2} \int_F \int y z^2 dy dz + E_{x_1} \int_{F_{x_1=0}} \int y z^2 dy dz \text{ [kg cm}^3\text{]} ,$$

$$K_{x_2} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} y^2 k_x dy = \frac{E}{1 - \mu^2} \int_F \int y^2 z^2 dy dz + E_{x_2} \int_{F_{x_2=0}} \int y^2 z^2 dy dz \text{ [kg cm}^4\text{]} ,$$

$$L_0 = 2 (1 - \mu) \int_{\eta_2}^{\eta_1} k dy = 4 G \int_F \int z^2 dy dz \text{ [kg cm}^2\text{]}$$

die statischen Querschnittswerte des Trägers als Produkte aus Materialkonstanten (E, G und μ) und Flächenträgheitsmomenten von zum Teil höherer Ordnung.

Die verschiedenen Querschnittswerte charakterisieren bestimmte statische Funktionen des Trägers.

K_{x_0} stellt die Biegesteifigkeit dar. Der Faktor $1/(1 - \mu^2)$ beim Anteil der Scheiben rührt von der Behinderung der Querschnittsverformung (Regelflächenansatz) her.

K_{x_1} sei als «Deviationssteifigkeit» bezeichnet. Diese charakterisiert die Verdrehung f_1 des Trägers infolge Querbelastrung P_0 bzw. die Durchsenkung f_0 infolge Torsionsbelastung P_1 , also die elastische Koppelung von Biegung und Torsion, wie sie zum Beispiel bei schiefachsigen Trägern auftritt. Die Deviationssteifigkeit ist dementsprechend auch nur dann von Null verschieden, wenn in dem betreffenden Querschnitt der Schubmittelpunkt (Schwerpunkt der k_x -Verteilung, siehe Fig. 9) außerhalb der als Biegeachse definierten x -Achse liegt.

Der Ausdruck L_0 bedeutet die Torsionssteifigkeit des flachen Trägers für konstante Verdrillung f_1' . Diese Torsionssteifigkeit besteht in der Fähigkeit des Trägers, umlaufende, geschlossene Schubflüsse im Querschnitt $x = \text{const}$ zu übertragen und sei daher als «Schubtorsionssteifigkeit» bezeichnet.

K_{x_2} charakterisiert dagegen die Torsionssteifigkeit des Trägers, welche aus der Behinderung der Querschnittsverwölbung bei variabler Verdrillung f_1' resultiert und sei daher als «Wölbtorsionssteifigkeit» bezeichnet.

Die Belastungsgrößen P_0 und P_1 werden durch Integration aus der äußeren Belastung p_{xy} erhalten, wobei zu berücksichtigen ist, daß in p_{xy} auch die Auflagerreaktionen enthalten sind. Diese Auflagerreaktionen müssen gegebenenfalls zunächst mit Hilfe einer statisch unbestimmten Rechnung ermittelt werden.

Die Funktion \bar{p}_{xy} weist, wie bereits erwähnt, an Unstetigkeitsstellen der Steifigkeitsverteilung Pole auf. Solche Unstetigkeiten ergeben sich praktisch immer an der Berandung der Träger. Bei der Integration über y ist dabei darauf zu achten, daß diese Pole, die einen Teil der Randwerte des Problems darstellen, innerhalb des Integrationsintervalls liegen. Dies wird angedeutet durch die Bezeichnung der Integrationsgrenzen mit η_2^- und η_1^+ . An diesen Grenzen, das heißt außerhalb des Trägerbereiches, verschwindet die lokale Steifigkeit mit sämtlichen Ableitungen. Durch diesen Umstand werden die entstehenden Formeln weitgehend vereinfacht, indem die Integrale

$$\int_{\eta_2}^{\eta_1^+} \frac{\partial k}{\partial y} dy \quad \text{und} \quad \int_{\eta_2}^{\eta_1^+} \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} dy$$

verschwinden.

Durch zweimalige Integration der Querbelastrung P_0 über x , vom Biegemomentennullpunkt x_0 als unterer Integrationsgrenze aus, erhält man das im

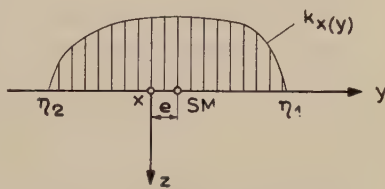


Fig. 9

Verteilung der Steifigkeit über die Trägertiefe.

Querschnitt $x = \text{const}$ übertragene, negativ definierte Biegemoment

$$M = - \int_{x_0}^x d\bar{x} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} P_0 dx = - f_0'' K_{x_0} - f_1'' K_{x_1}. \quad (10a)$$

Durch einmalige Integration der Torsionsbelastung P_1 über x , vom Torsionsmomentennullpunkt x_1 aus, erhält man das vom Querschnitt $x = \text{const}$ übertragene, negativ definierte Torsionsmoment

$$D = - \int_x^{x_1} P_1 dx = f_1' L_0 - (f_0'' K_{x_1})' - (f_1'' K_{x_2})'. \quad (11a)$$

Mit (10a) und (11a) hat man zwei simultane, gewöhnliche Differentialgleichungen für die gesuchten Verformungskoeffizienten f_0 und f_1 erhalten. Aus diesen läßt sich die Krümmung f_0'' ohne weiteres eliminieren, und es ergibt sich

$$D - \left(M \frac{K_{x_1}}{K_{x_0}} \right)' = f_1' L_0 - \left[f_1' \left(K_{x_2} - \frac{K_{x_1}^2}{K_{x_0}} \right) \right]'$$

Erinnern wir uns an die Definition der einzelnen statischen Querschnittswerte, so ergibt sich (Fig. 9):

$$\frac{K_{x_1}}{K_{x_0}} = \frac{\int_{\eta_2}^{\eta_1} y k_x dy}{\int_{\eta_2}^{\eta_1} k_x dy} = e; \quad \text{Abstand des Schubmittelpunktes von der Biegeachse (x-Achse);}$$

$$K_{x_2} - \frac{K_{x_1}^2}{K_{x_0}} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} (y - e)^2 k_x dy = L_{x_2}; \quad \text{Wölb-torsionssteifigkeit, bezogen auf den Schubmittelpunkt.}$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet die Differentialgleichung für den relativen Verdrehwinkel (Verdrehwinkel/Längeneinheit) $f_1' = \varphi$

$$D - (M e)' = L_0 \varphi - (L_{x_2} \varphi)'. \quad (12a)$$

Durch Auflösen von (12a) für die bei einem bestimmten Problem vorgegebenen Randbedingungen von φ läßt sich $\varphi' = f_1''$ ermitteln. Unter Berücksichtigung von (10a) kann, bei einmal bekanntem f_1'' , auch die Durchsenkung f_0 berechnet werden. Damit ist die elastische Regelfläche des Trägers bekannt.

Mit

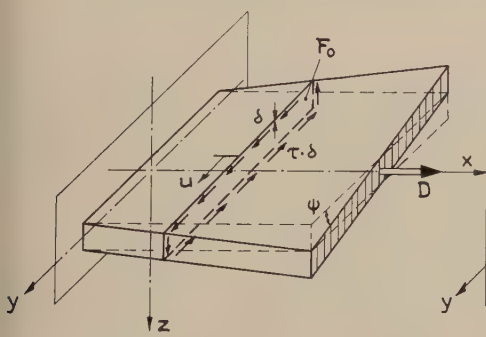
$$S = \varphi L_0 \quad (\text{Schubtorsionsmoment})$$

und $V' = -(\varphi' L_{\omega_2})'$ (Wölbtorsionsmoment)

wird die Verdrehungsgleichung (12a) zu

$$D - (M e)' = S + V'.$$

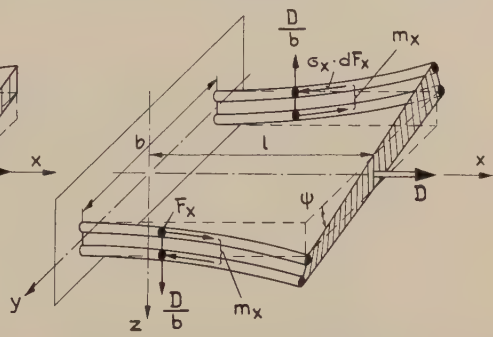
Die linke Seite dieser Beziehung stellt die verdrehende Belastung des Trägers dar. Bei exzentrischen und schiefachsigen Trägern ($e \neq 0$) bewirkt auch das Biegemoment M und die Querkraft M' eine Verdrehung. Die rechte Seite beschreibt dagegen die statische Wirkungsweise des Trägers. Die verdrehende



$$D = S = \oint \tau \delta dF_0$$

$$\tau \delta = \frac{D}{2F_0}$$

Fig. 10
Schubtorsionsträger.



$$D = W = -\left(\int \sigma_x y z dF_x\right)' = -\frac{\partial m_x}{\partial x} b$$

$$m_x = \frac{D}{b} (l - x)$$

Fig. 11
Wölbtorsionsträger.

Belastung kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten übertragen werden, nämlich als Schubtorsion, dargestellt durch den Term $S = \varphi L_0$, oder als Wölb-torsion, dargestellt durch den Term $V' = -(\varphi' L_{\omega_2})'$.

Die Figuren 10 und 11 veranschaulichen die physikalische Bedeutung der hier eingeführten Begriffe an zwei verschiedenartig wirkenden Torsionsträgern. Bei beiden handelt es sich um einseitig eingespannte, geradeachsige Träger, die an ihrem freien Ende durch ein Torsionsmoment D beansprucht werden.

Fig. 10 zeigt einen Fall reiner Schubtorsionssteifigkeit. Die Wände des geschlossenen Kastenträgers sollen keine Normalspannungen σ_x übernehmen können. Damit können sich die zur x -Achse normalen Querschnitte unbehindert verwölben. Das gesamte Torsionsmoment setzt sich in Form von Schubspannungen τ , als Schubtorsionsmoment S ab.

Im Gegensatz dazu zeigt Fig. 11 einen Fall reiner Wölb-torsionssteifigkeit. Ein solcher Träger besteht aus mindestens vier Längsurten (Versteifungen),

die, zusammen mit dem Schubverband, paarweise statisch unabhängige Biegeträger bilden. Die Kräfte D/b beanspruchen einzeln und in entgegengesetzter Richtung die beiden Biegeträger und werden von diesen als Querkräfte im Steg weitergeleitet.

Im allgemeinen enthält nun ein Schichtträger sowohl Schub- als auch Wölb-torsionssteifigkeit.

Während nun das im Querschnitt übertragene Torsionsmoment vom inneren, statischen Aufbau des Trägers unabhängig ist, ist dessen Aufteilung in die Komponenten S und V' im Prinzip ein statisch unbestimmtes Problem und im wesentlichen abhängig vom Verhältnis von Wölb- zu Schubtorsionssteifigkeit L_0/L_{α_2} .

Im vorliegenden Falle wird dieses Problem durch die Differentialgleichung (12a) bei gegebenen Randbedingungen gelöst. Die jeder statisch unbestimmten Rechnung zugrunde liegende Deformationsbedingung ist in dieser Gleichung stillschweigend enthalten. Sie lautet explizit: Die Verdrehung infolge Schub-

torsionsmoment $f_{1S} = \int_{x_1}^x (S/L_0) dx$ ist an jeder Stelle x gleich der Verdrehung infolge Wölb-torsionsmoment $f_{1V'} = \int_{x_1}^x d\bar{x} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \frac{V'}{L_{\alpha_2}} d\bar{x}$.

Diese Bedingung wird erzwungen durch den kontinuierlichen, schubstarren Schubverband in der Querrichtung.

Erweitern wir die in diesem Abschnitt gemachten Überlegungen auf einen nichtorthotropen Schichtträger mit beliebigen Versteifungswinkeln gemäß (5). Wir erhalten durch analoge Ableitung mit Hilfe des Regelflächenansatzes für die Verformung die beiden gewöhnlichen, simultanen Differentialgleichungen für Biege- und Torsionsmoment:

$$M = -f_0'' K_{\alpha_0} - f_1'' K_{\alpha_1} - 2f_1' \sum^i \operatorname{tg} \alpha_i \frac{K_{\alpha_{i0}}}{K_0 + K_{\alpha_{i0}}} \quad (10)$$

und

$$\left. \begin{aligned} D = f_1' \left(L_0 + 4 \sum^i \operatorname{tg}^2 \alpha_i K_{\alpha_{i0}} \right) - (f_1'' K_{\alpha_2} + f_0'' K_{\alpha_1})' \\ + 2 \left(\sum^i \operatorname{tg} \alpha_i (K_{\alpha_{i0}} f_0'' - K_{\alpha_{i1}} f_1') \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Durch Eliminieren von f_0'' erhalten wir die vollständige Verdrehungsgleichung:

$$\begin{aligned} D - (M e)' + 2M \sum^i \operatorname{tg} \alpha_i \frac{K_{\alpha_{i0}}}{K_0 + K_{\alpha_{i0}}} \\ = f_1' \left\{ L_0 + 4 \sum^i \left[\operatorname{tg}^2 \alpha_i K_{\alpha_{i0}} \left(1 - \frac{K_{\alpha_{i0}}}{K_0 + K_{\alpha_{i0}}} \right) \right] + 2 \sum^i \operatorname{tg} \alpha_i [K_{\alpha_{i0}} (e - e_{\alpha_i})] \right\} \\ - (f_1'' L_{\alpha_2})'' \quad (12) \end{aligned}$$

Die dabei verwendeten Bezeichnungen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha_{i0}} &= \cos^4 \alpha_i \int_{\eta_2}^{\eta_1} k_{\alpha_i} dy & K_{x_0} &= K_0 + \sum^i K_{\alpha_{i0}} \\
 K_{\alpha_{i1}} &= \cos^4 \alpha_i \int_{\eta_2}^{\eta_1} y k_{\alpha_i} dy & K_{x_1} &= K_1 + \sum^i K_{\alpha_{i1}} \\
 K_{\alpha_{i2}} &= \cos^4 \alpha_i \int_{\eta_2}^{\eta_1} y^2 k_{\alpha_i} dy & K_{x_2} &= K_2 + \sum^i K_{\alpha_{i2}} \\
 L_{\alpha_{i2}} &= \cos^4 \alpha_i \int_{\eta_2}^{\eta_1} (y - e)^2 k_{\alpha_i} dy & L_{x_2} &= \int_{\eta_2}^{\eta_1} (y - e)^2 k dy + \sum^i L_{\alpha_{i2}}
 \end{aligned}$$

$e = \frac{K_{x_1}}{K_{x_0}}$: Abstand des Schubmittelpunktes [Schwerpunkt der $(k + \sum^i \cos^4 \alpha_i k_{\alpha_i})$ -Verteilung] von der Biegeachse;

e_{α_i} : Abstand des Schwerpunktes der Versteifungsquerschnitte $(\sum^i k_{\alpha_i}$ -Verteilung) von der Biegeachse.

Die erweiterte Differentialgleichung (12) für die Verdrehung des nicht-orthotropen Trägers zeigt den nämlichen grundsätzlichen Aufbau wie die oben diskutierte Beziehung (12a) für den orthotropen Träger.

Die verdrehende Belastung erhält ein zusätzliches Glied

$$\left(2 M \sum^i \operatorname{tg} \alpha_i \frac{K_{\alpha_{i0}}}{K_0 + K_{\alpha_{i0}}} \right)$$

welches auch bei geradeachsigen Trägern eine elastische Koppelung (Verdrehung infolge Biegemoment) hervorruft. Mit Hilfe dieser Wirkung von schiefwinklig eingebauten Versteifungen kann andererseits die elastische Koppelung bei schiefachsigen Trägern bei geeigneter Dimensionierung reduziert werden, was zum Beispiel bei flugtechnischen Anwendungen (Pfeilflügel) von Interesse sein kann.

Die statische Wirkungsweise des Trägers unter verdrehender Belastung ist wieder statisch unbestimmt. Die Versteifungen tragen dabei sowohl zur Schub- als auch zur Wölbtorsionssteifigkeit bei.

8. Das querverformende Gleichgewichtssystem

In vielen Fällen kann der Regelflächenansatz $w = f_0 + y f_1$ die wirkliche Verformung des Trägers nur sehr unvollkommen beschreiben. Es ist dann not-

wendig, die Wirkung des Gleichgewichtssystems $g_{xy} = p_{xy} - \bar{p}_{xy}$ wenigstens annäherungsweise zu erfassen.

Durch Einsetzen der nunmehr bekannten Verformungskoeffizienten f_0 und f_1 erhalten wir für das Gleichgewichtssystem des orthotropen Trägers:

$$g_{xy} = p_{xy} - \left\{ [k_x (f_0'' + y f_1'')]'' + 2(1 - \mu) \left[f_1' \frac{\partial k}{\partial y} \right]' \right\} \\ - \mu \left\{ (f_0'' + y f_1'') \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + 2 f_1'' \frac{\partial k}{\partial y} \right\}$$

etwas umgeformt:

$$g_{xy} = p_{xy} - \left\{ \left[-M \frac{k_x}{K_{x_0}} - V \frac{k_x (y - e)}{L_{x_2}} \right]'' + \left[S \frac{\partial k / \partial y}{K_0} \right]' \right\} \\ + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ M \frac{k}{K_{x_0}} + V \frac{(y - e) k}{L_{x_2}} \right\}. \quad (13)$$

Die Beziehung (13) drückt das querverformende Gleichgewichtssystem g_{xy} in Funktion der äußeren Belastung und ihrer statisch unbestimmten Anteile M , S und V sowie der statischen Steifigkeitswerte des Trägers aus.

Die zusätzliche Verformung w_y des Trägers infolge g_{xy} kann mit Hilfe der bekannten Streifenmethode in den meisten Fällen mit genügender Genauigkeit bestimmt werden. Die Anwendung der Streifenmethode wird dabei besonders durch den Umstand vereinfacht, daß g_{xy} definitionsgemäß über jeden Querstreifen in y -Richtung ein in sich geschlossenes Gleichgewichtssystem bildet (siehe Fig. 7). Das negative Biegemoment $-m_y^*$ für einen solchen aus dem Trägerverband gelöst gedachten Streifen kann somit direkt durch zweimalige Integration von g_{xy} über y erhalten werden:

$$m_y^* = \int_{\sim}^y d\bar{y} \int_{\sim}^{\bar{y}} p_{xy} d\bar{y} = (M b \varrho_{x_0} + V \varrho_{x_2})'' + (S \varrho_0)' - \mu \left(\frac{M}{b} v_0 + \frac{V}{b_2} v_2 \right). \quad (14)$$

Dabei sind die «Querverformungsziffern»

$$\varrho_{x_0} = \frac{1}{b K_{x_0}} \int_{\eta_2}^y d\bar{y} \int_{\sim}^{\bar{y}} k_x d\bar{y}, \quad v_0 = \frac{k b}{K_{x_0}}, \\ \varrho_{x_2} = \frac{1}{L_{x_2}} \int_{\eta_2}^y d\bar{y} \int_{\sim}^{\bar{y}} k_x (y - e) d\bar{y}, \quad v_2 = \frac{k b^2 (y - e)}{L_{x_2}}, \\ \varrho_0 = \frac{1}{K_0} \int_{\eta_2}^y k d\bar{y}$$

dimensionslose Funktionen von y , welche für jeden Querschnitt $x = \text{const}$ eines gegebenen Trägers ein für allemal berechnet werden können. Sind die

Belastungsgrößen M , V^1) und S bekannt, so kann mit Hilfe der Beziehung (14) das Streifenbiegemoment m_y^* berechnet werden. Die Verformung eines orthotropen Streifens infolge m_y^* ergibt sich mit Hilfe der Beziehungen (1a), wobei $m_y = m_y^*$, $m_x = m_{xy} = 0$ gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} &= - \frac{m_y^*}{k_y [1 - (k^2/k_x k_y) \mu^2]}, \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} &= \frac{m_y^* \mu k}{k_x k_y - \mu^2 k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die einzeln verformten Streifen können nun wieder zum vollständigen Träger zusammengesetzt werden, wobei zu beachten ist, daß die zum Zusammenpassen der Schnittufer notwendigen Scherkräfte und Momente keine resultierende Dynamie haben dürfen, das heißt, daß diese statisch unbestimmten Belastungen, wiederum für jeden Schnitt zwischen zwei Streifen, Gleichgewichtssysteme zu bilden haben. Oft treten Unstetigkeiten auf in der Verformung w^* , welche mit der Deformationsbedingung des zusammenhängenden Trägers in Widerspruch stehen. Solche Unstetigkeiten können «von Hand» oder durch geeignet gewählte Ansätze ausgeglichen werden. Dieses rohe Näherungsverfahren ist dann genügend, wenn die Gesamtverformung des Trägers von einer Regelfläche ohnehin nur wenig abweicht, so daß ein Fehler in der anzubringenden Korrektur sich nur unwesentlich auswirkt.

Eine Verbesserung ergibt sich bei Anwendung der bekannten Streifenrostmethode zur Berechnung des Einflusses des querformenden Gleichgewichtssystems g_{xy} . Diese Methode erfordert jedoch häufig die Berücksichtigung von statisch unbestimmten Biege- und Verdrehmomenten, so daß schon bei einfachem Rost eine statisch hochgradig unbestimmte Rechnung durchgeführt werden muß.

Wo eine genaue Rechnung gefordert wird, zum Beispiel bei Spannungsermittlungen, kann der durch die Querstreifenmethode gewonnene Näherungswert durch Eingehen in die ursprüngliche partielle Differentialgleichung mit Hilfe der Relaxationsrechnung bis zu beliebiger Genauigkeit verbessert werden. Diese Möglichkeit ist im allgemeinen der Streifenrostmethode vorzuziehen.

9. Erweiterung des Verformungsansatzes

Zur Verfeinerung der Berechnung ist es naheliegend, die Ansätze für die Verformung w zu erweitern. Der dabei zu beschreitende Weg ist durch die vorangehenden Entwicklungen bereits vorgezeichnet:

Betrachtet werde wieder ein orthotroper Träger gemäß (5a). Der Verformungsansatz enthalte nun aber außer der Durchsenkung und Verdrehung des

¹⁾ $V = \int_x V' dx$: «Wölbgröße», analog zum Biegemoment M .

Querschnittes $x = \text{const}$ auch die beiden ersten Terme der Querverformung (Eigenverformung des Querschnittes) gemäß Fig. 5:

$$w = f_0 + y f_1 + y^2 f_2 + y^3 f_3. \quad (6b)$$

Die dieser Verformung entsprechende Belastung \bar{p} soll folgenden Bedingungen genügen:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\eta_2^-}^{\eta_1^+} \bar{p} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} p dy = P_0, \\ \int_{\eta_2^-}^{\eta_1^+} y \bar{p} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y p dy = P_1, \\ \int_{\eta_2^-}^{\eta_1^+} y^2 \bar{p} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p dy = P_2, \\ \int_{\eta_2^-}^{\eta_1^+} y^3 \bar{p} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^3 p dy = P_3. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Mit den Bedingungen (8b), dem Ansatz (6b) und der Differentialgleichung (5a) ergeben sich vier simultane Differentialgleichungen, welche die vier Verformungskoeffizienten f_0, \dots, f_3 mit der äußeren Belastung, ausgedrückt durch die Integrale P_0, \dots, P_3 , und mit den maßgebenden statischen Querschnittswerten K verknüpfen:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= (f_0'' K_{x_0})'' + (f_1'' K_{x_1})'' + (f_2'' K_{x_2})'' + (f_3'' K_{x_3})'' + 2\mu (f_2 K_0 + 3 f_3 K_1)'', \\ P_1 &= (f_0'' K_{x_1})'' + (f_1'' K_{x_2})'' + (f_2'' K_{x_3})'' + (f_3'' K_{x_4})'' + 2\mu (f_2 K_1 + 3 f_3 K_2)' \\ &\quad - 2(1 - \mu) (f_1' K_0 + 2 f_2' K_1 + 3 f_3' K_2)', \\ P_2 &= (f_0'' K_{x_1})'' + (f_1'' K_{x_2})'' + (f_2'' K_{x_3})'' + (f_3'' K_{x_4})'' + 2\mu (f_2 K_2 + 3 f_3 K_3)' \\ &\quad - 4(1 - \mu) (f_1' K_1 + 2 f_2' K_2 + 3 f_3' K_3)' \\ &\quad + 2\mu (f_0' K_0 + f_1' K_1 + f_2' K_2 + f_3' K_3) + 4 f_2 K_{y_0} + 12 f_3 K_{y_1}, \\ P_3 &= (f_0'' K_{x_3})'' + (f_1'' K_{x_4})'' + (f_2'' K_{x_5})'' + (f_3'' K_{x_6})'' + 2\mu (f_2 K_3 + 3 f_3 K_4)' \\ &\quad - 6(1 - \mu) (f_1' K_2 + 2 f_2' K_3 + 3 f_3' K_4)' \\ &\quad + 6\mu (f_0' K_1 + f_1' K_2 + f_2' K_3 + f_3' K_4) + 12 K_{y_1} + 36 K_{y_2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Mit den statischen Querschnittswerten

$$K_n = \int_{\eta_2}^{\eta_1} y^n k dy, \quad K_{x_n} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} y^n k_x dy, \quad K_{y_n} = \int_{\eta_2}^{\eta_1} y^n k_y dy.$$

Eine Auflösung des Gleichungssystems (16) für beliebige Belastungen P und beliebige Steifigkeitskoeffizienten K mit Hilfe von numerischen Methoden erscheint als außerordentlich schwierig und bietet gegenüber der direkten Lösung des partiellen Problems (5) mit Hilfe der Relaxationsrechnung kaum irgendwelche Vorteile. Bei bestimmten Symmetrie- bzw. Antimetrieverhältnissen verschwinden die Verformungskoeffizienten f_1 und f_3 bzw. f_0 und f_2 , so daß nur noch zwei simultane Differentialgleichungen 4. Ordnung zu lösen sind. Dieses Problem ist im allgemeinen noch mit erträglichem Aufwand an numerischer Rechnung lösbar.

Auch hier können die gewonnenen Ergebnisse als Grundlage einer Relaxationsrechnung verwendet werden, um genauere Resultate zu erhalten.

10. Berechnungsbeispiele

Die Brauchbarkeit der im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln soll hier an zwei einfachen Belastungsfällen für einen rechteckigen, einseitig eingespannten, orthotropen Kragträger demonstriert werden.

a) Verdrehung des Kragträgers durch antimetrische Randscherkräfte

Ein rechteckiger, orthotroper Kragträger gemäß Fig. 12a von konstanter lokaler Steifigkeit k und $k_x = 1,2 k$, soll durch Randscherkräfte $-P_1/b = \text{const}$ verdreht werden. Diese Randscherkräfte spielen die Rolle des belastenden Systems p_{xy} . Das Seitenverhältnis des Trägers betrage $l/b = 1/0,75$, das Material habe eine Querdehnungszahl von $1/3$.

Fig. 12b zeigt die grundsätzliche Form der elastischen Fläche bei behinderter Querverformung (Regelfläche).

Mit den getroffenen Annahmen ergeben sich die statischen Querschnittswerte zu:

$$L_0 = 2(1 - \mu) k b = 1 \cdot k,$$

$$L_{x_2} = k_x \frac{b^3}{12} = \frac{27}{640} k.$$

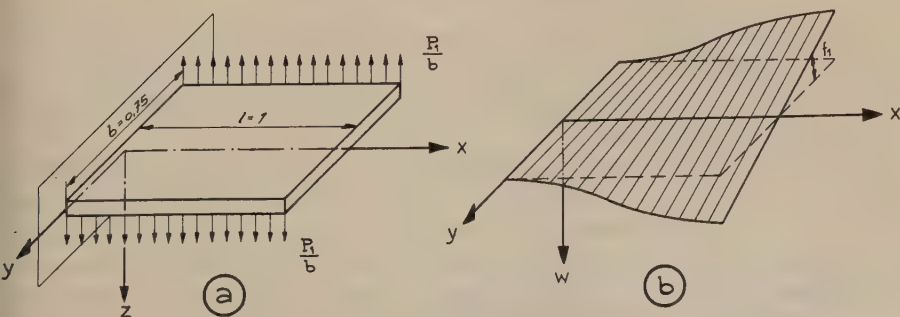


Fig. 12

Das im Querschnitt $x = \text{const}$ übertragene Torsionsmoment beträgt:

$$D = P_1 (1 - x).$$

Die Verdrehungsdifferentialgleichung (12a) bei behinderter Querverformung lautet damit:

$$\varphi'' - \varphi \frac{640}{27} + \frac{P_1}{k} \cdot \frac{640}{27} (1 - x) = 0.$$

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_{(0)} &= 0 \quad (\text{eingespannter Querschnitt}), \\ \varphi'_{(1)} &= 0 \quad (\text{freies Ende}). \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung kann noch auf analytischem Wege gefunden werden. Mit Hilfe eines Exponentialansatzes und unter Berücksichtigung der vorliegenden Randbedingungen erhält man:

$$\varphi = \frac{P_1}{k} \left(-\cosh \lambda x - \frac{1 + \lambda \sinh \lambda}{\lambda \cosh \lambda} \sinh \lambda x + 1 - x \right)$$

mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{L_0}{L_{x_2}}} = \sqrt{\frac{640}{27}}.$$

Nach einmaliger Integration dieses Ausdruckes, unter Berücksichtigung von $f_{1(0)} = 0$, ergibt sich der Verdrehwinkelverlauf:

$$f_1 = \frac{P_1}{k} \left(-\frac{1}{\lambda} \sinh \lambda x - \frac{1/\lambda + \sinh \lambda}{\lambda \cosh \lambda} (\cosh \lambda x - 1) + x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Bei einmal bekanntem Verlauf von f_1 kann die statisch unbestimmte Aufteilung von D in S und V'' ohne weiteres berechnet werden:

$$S = f'_1 L_0; \quad V'' = f'''_1 L_{x_2}; \quad V = f''_1 L_{x_2}.$$

Ist einmal S und V bekannt, so läßt sich die Querverformung mit Hilfe der Beziehungen (14) und (15) ermitteln. Diese Querverformung ist im vorliegenden Fall von untergeordneter Bedeutung, es soll daher hier nicht näher auf diese eingegangen werden.

In Fig. 13 ist der bezogene Verdrehwinkel $f_1 k/P_1$ in Funktion der Trägerlänge x aufgetragen. Zum Vergleich wurde der Verdrehwinkelverlauf nach DE ST-VENANT bei vernachlässigten Längsspannungen eingetragen. Es zeigt sich dabei der sehr erhebliche Einfluß der Behinderung der Querschnittsverwölbung (axiale Verformung ursprünglich ebener Querschnitte) am eingespannten Querschnitt auf die Gesamtverformung des Trägers.

b) *Biegung des Kragträgers durch zentrische Linienbelastung*

Der im vorhergehenden behandelte Kragträger soll durch eine Linienbelastung $P_0 = \text{const}$ gebogen werden (Fig. 14a). Die Querverformung ist in diesem Falle zu berücksichtigen. Als elastische Fläche wird sich eine Art Sattelfläche ausbilden (Fig. 14b). Die dabei zu berücksichtigende Querbiegesteifigkeit betrage $k_y = k_x = 1,2 k$.

Bei unterdrückter Querverformung erhalten wir zunächst:

$$\bar{f}_0 = \frac{P_0}{2 K_{x_0}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)^1.$$

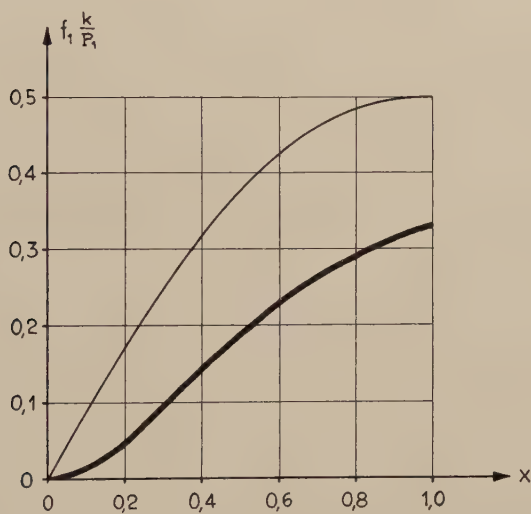


Fig. 13

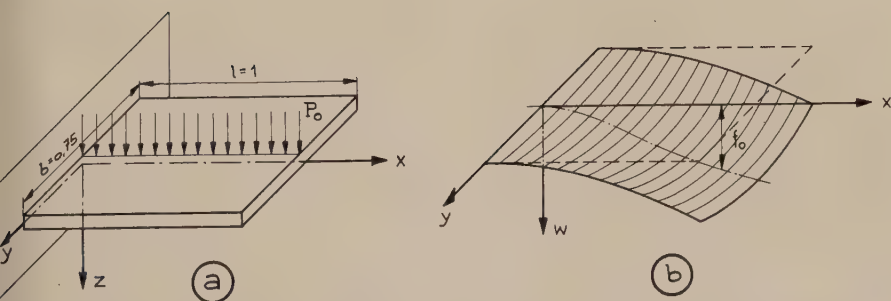


Fig. 14

¹⁾ Der Querstrich bei \bar{f}_0 soll andeuten, daß sich dieser Wert auf die Durchsenkung der elastischen Fläche bei behinderter Querverformung bezieht.

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Biegelinie des einfachen Balkens nur durch den Faktor $1/(1 - \mu^2)$ der Biegesteifigkeit bei behinderter Querverformung.

Es soll nun nach der Querstreifenmethode die Querverformung näherungsweise berechnet werden.

Wir erhalten mit $S = V = 0$ für das Querbiegemoment aus (14):

$$m_y^* = - \int_{-\infty}^y d\bar{y} \int_{-\infty}^{\bar{y}} p_{xy} dy - (M b q_{x_0})'' - \mu \frac{M}{b} r_0,$$

wobei

$$q_{x_0} = y^2 \frac{8}{9} + y \frac{2}{3} + \frac{1}{9}; \quad r_0 = \frac{k}{k_x} = \frac{1}{1,2}.$$

Für $y < 0$ (linke Hälfte der Momentenfläche) ergibt sich daraus:

$$m_{y < 0}^* = P_0 \left(y^2 \frac{2}{3} + y \frac{1}{2} + \frac{3}{32} + \frac{1}{5,4} (1 - x)^2 \right).$$

Für die näherungsweise Bestimmung der Verformung infolge m_y^* ist es zweckmäßig, mit einem über die Trägerbreite gebildeten Mittelwert des Querbiegemomentes zu rechnen:

$$\tilde{m}_y^* = \frac{1}{b} \int m_y^* dy = P_0 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{5,4} (1 - x)^2 \right).$$

Mit den Beziehungen (15) ergibt sich daraus die Verformung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} &= 2 f_2^* = -0,9030 \tilde{m}_y^*, \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} &= f_0^* = 0,2508 \tilde{m}_y^*. \end{aligned}$$

Fig. 15 zeigt den so berechneten Verlauf von f_2^* . Dieser Wert charakterisiert die Krümmung der aus dem Trägerverband gelöst gedachten Streifen.

Bei $x = 0$ (eingespanntes Ende) muß nun die Querkrümmung des zusammenhängenden Trägers sowie deren erste Ableitung verschwinden. Die Einspannung bewirkt somit eine Reduktion der Querkrümmung in der Umgebung der eingespannten Stelle. Dieser Einfluß soll durch einen zweckmäßig zu wählenden Korrekturfaktor $\Phi_{(x)}$ berücksichtigt werden, wobei

$$\Phi_{0 < x < 0,75} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{0,75} \right), \quad \Phi_{0,75 < x < 1} = 1$$

gesetzt wird. Dies entspricht der Überlegung, daß der Einspannungseinfluß in einem Bereich, der gleich der Trägerbreite $b = 0,75$ ist, praktisch vollständig abklingt.

Der unter diesen Annahmen berechnete Verformungskoeffizient

$$f_2 = -0,4515 \tilde{m}_x^* \Phi$$

sowie die Durchsenkung bei berücksichtigter Querverformung

$$f_0 = \bar{f}_0 + 0,2508 \int_0^x d\bar{x} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \tilde{m}_y^* \Phi d\bar{x}$$

wurden in Fig. 15 eingetragen.

Die Koeffizienten f_0 und f_2 können im Prinzip auch mit Hilfe der ersten und dritten Gleichung der Beziehung (16) gefunden werden.

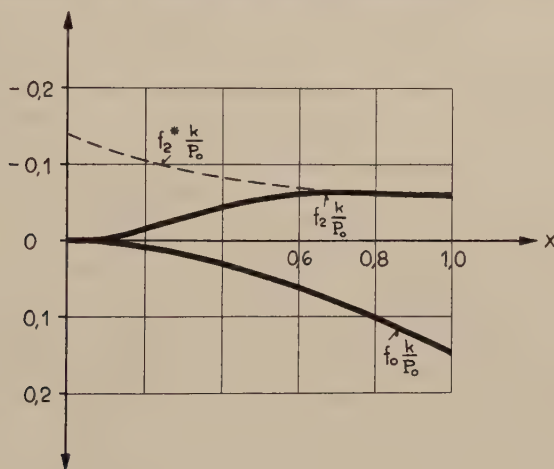


Fig. 15

Mit $f_1 = f_3 = 0$ lautet die entstehende Differentialgleichung nach Eliminieren von f_2'' :

$$P_2 + \left(M \frac{K_{x_2}}{K_{x_0}} \right)'' + 2 \mu \frac{K_0}{K_{x_0}} = \left[f_2'' \left(K_{x_4} - \frac{K_{x_2}^2}{K_{x_0}} \right) \right]'' - \varrho (1 - \mu) (f_2' K_2)' + 4 f_2 \left(K_{y_0} - \mu^2 \frac{K_0^2}{K_{x_0}} \right).$$

Durch Auflösen dieser Gleichung erhält man den Verformungskoeffizienten f_2 direkt, ohne daß die sehr rohe «Korrekturfaktormethode» angewendet werden müßte. Die Lösung dieser Differentialgleichung 4. Ordnung stößt jedoch schon auf gewisse Schwierigkeiten in der numerischen Auswertung (numerische Instabilität der Ausdrücke infolge Differenzbildung sehr großer Zahlen), so daß dieses Verfahren nicht unbedingt genauere Resultate zeitigt als die ingenieurmäßige Querstreifenmethode. Es wurde daher auf eine Durchführung der Rechnung an dieser Stelle verzichtet.

Summary

The ordinary simple beam theory deals with structural elements which are considered as "one-dimensional", for both width and thickness are assumed to be small compared with the length. But for many important applications, this assumption is not valid. Plate-like structures with a width of the same magnitude as the length are often encountered in structural engineering problems.

To deal with such "beams of finite width", a generalized model of a plate-like laminated structure is considered. This is a "two-dimensional" structure built up of several layers and having both considerable length and width compared with a small but variable thickness. The different layers are used to simulate peculiar elastic properties, for instance due to built-in ribs or reinforcements in concrete plates or stringers in aircraft wings, as well as to simulate the action of a core or filler, used in sandwich-type structures as encountered in aircraft design. Thus, this kind of laminated structure behaves like a plate, with generalized, non-orthotropic elastic properties and with a local rigidity variable over the extension of the plate and variable also in all directions of the middle-surface of the structure. Arbitrary planforms of structure and supporting conditions are taken into account.

Applying the theory of elastic plates, the relation between load and elastic deformation is deduced. Analysis yields a partial, linear differential equation of fourth order with variable coefficients, as an extension of the biharmonic bending equation of solid plates of uniform thickness.

By suppressing bending in a specified direction (transverse direction), the partial differential equation is broken down in a system of two simultaneous ordinary differential equations for the deflection and the angle of twist of transverse cross-sections. These equations may be solved by means of analytical or numerical analysis. From these, new structural significant values of cross-section are defined, in addition to the well-known bending rigidity and DE ST-VENANT'S torsional rigidity. These structural values give a more complete picture of the elastic behavior of the beams of finite width.

The effect of transverse bending initially neglected, is often very small. However, it can be investigated by means of a strip method or by using further members of the power series describing deflection, angle of twist and distortion of the transverse cross-sections. Furthermore, the approximate solutions may be corrected by relaxation methods to any desired degree of accuracy.

Two simple examples of rectangular plates, clamped at one edge, subject to bending and torque, show the use of the formulas deduced in this paper. Further examples in connection with test results concerning both straight and swept structures are published in Ref. [7]¹⁾ which forms the background of this paper. Ref. [7] also deals with the effect of non-continuous cores and cores with considerable deformation in shear, normal to the middle-surface of the structure. In the same paper, a numerical method is mentioned to solve the boundary value problem, which involves the differential equations with variable coefficients for the distortion of the structure of variable rigidity.

Further problems of plate-like structures will be investigated by means of the theory as developed, and reported in later publications.

(Eingegangen: 22. 6. 1950.)

¹⁾ References see ZAMP 2, 34 (1951).

On Ertel's Vorticity Theorem

By CLIFFORD A. T. TRUESDELL, Washington D.C.¹⁾

A few years ago ERTEL²⁾ discovered a generalization of SILBERSTEIN's vorticity equation³⁾ for inviscid fluids. ERTEL's result is of interest partly because of its elegant geometrical interpretation, suggested by analogy to the celebrated BJERKNES circulation theorem, but more especially because it contains an arbitrary function which may be identified with various meteorological observables in turn, thus giving rise to a sequence of interesting deductions. In this note I shall exhibit the kinematical foundation of ERTEL's equation, thence derive its generalization to viscous compressible fluids, and finally discuss some other forms and consequences of it.

Now at bottom all vorticity theorems are equivalent forms, interpretations, or special cases of the LAGRANGE-BELTRAMI⁴⁾ equation

$$\frac{D}{Dt} (\alpha \mathbf{w}) = \alpha \operatorname{curl} \mathbf{a} + \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{v}. \quad (1)$$

Here D/Dt denotes the material derivative, α is the specific volume, \mathbf{v} is the velocity, $\mathbf{w} \equiv \operatorname{curl} \mathbf{v}$ is the vorticity, and $\mathbf{a} \equiv D\mathbf{v}/Dt$ is the acceleration. ERTEL's result is no exception. Let A be any scalar, vector, or tensor function. By vectorial transformations and the equation (1) only we obtain

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} A) &= \alpha \mathbf{w} \frac{D}{Dt} \operatorname{grad} A + (\alpha \operatorname{curl} \mathbf{a} + \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{v}) \operatorname{grad} A \\ &= \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \frac{\partial A}{\partial t} + \alpha \mathbf{w} (\mathbf{v} \operatorname{grad} \operatorname{grad} A) \\ &\quad + \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{v} \operatorname{grad} A + \alpha \operatorname{curl} \mathbf{a} \operatorname{grad} A \\ &= \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \frac{DA}{Dt} - \alpha \mathbf{w} [\operatorname{grad} (\mathbf{v} \operatorname{grad} A) \\ &\quad - \mathbf{v} \operatorname{grad} \operatorname{grad} A - \operatorname{grad} \mathbf{v} \operatorname{grad} A] + \alpha \operatorname{curl} \mathbf{a} \operatorname{grad} A \end{aligned} \right\} (2).$$

¹⁾ Applied Mathematics Branch, Mechanics Division; Naval Research Laboratory.

²⁾ H. ERTEL, *Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz*, Naturwissenschaften 30, 543—544 (1942); *Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz*, Meteorol. Z. 59, 277—281 (1942); *Über das Verhältnis des neuen hydrodynamischen Wirbelsatzes zum Zirkulationssatz von V. Bjerknes*, Meteorol. Z. 59, 385—387 (1942); *Über hydrodynamische Wirbelsätze*, Phys. Z. 43, 526—529 (1942).—I am indebted to Drs. NEMÉNYI, PRIM, and VAN TUYL for criticism and discussion of an earlier version of this paper, written over two years ago, and to Dr. NEMÉNYI also for having suggested an investigation of the kinematical basis of ERTEL's result and for criticism of this paper.

³⁾ L. SILBERSTEIN, *Über die Entstehung von Wirbelbewegung in einer reibungslosen Flüssigkeit*, C. r. Acad. Sci. Cracovie 280—290 (1896).

⁴⁾ E. BELTRAMI, *Sui principi fondamentali della idrodinamica*, Mem. Acc. Sci. Bologna [3] 1, 431—476 (1871); 2, 381—437 (1872); 3, 349—407 (1873); 5, 443—484 (1874) = *Ricerche sulla cinematica dei fluidi*, Opere 2, 202—379, see § 6.

Hence finally

$$\frac{D}{Dt} (\alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} A) = \alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} \frac{DA}{Dt} = \alpha \operatorname{curl} \mathbf{a} \operatorname{grad} A. \quad (3)$$

This kinematical identity is equivalent to (1), for only (1), and vectorial identities have been used in deriving it, while if A be taken as the radius vector (3) in turn reduces to (1).

ERTEL's conservation theorem may now be given a purely kinematical form: *Let A be any substantially constant scalar function such that the projection of $\operatorname{curl} \mathbf{a}$ upon the surfaces $A = \text{const}$ is always zero; then*

$$\alpha \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial x_w},$$

where $\partial/\partial x_w$ is the derivative in the direction of the vorticity vector, is also a substantially constant function.

Proof: The hypotheses are $DA/Dt = 0$, $\operatorname{curl} \mathbf{a} \operatorname{grad} A = 0$. Hence

$$\frac{D(\alpha \mathbf{w} \operatorname{grad} A)}{Dt} = 0$$

by (3). For any vector \mathbf{w} and any scalar A ,

$$\mathbf{w} \operatorname{grad} A = \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial x_w}, \quad \text{Q. E. D.}$$

In the particular case of a circulation-preserving motion, $\operatorname{curl} \mathbf{a} = 0$, and ERTEL's result holds for any substantially constant function A .

When applied to any specific material, the basic equation (3) may be put into a dynamical form. For a viscous compressible fluid, for example, we make the substitution¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{a} = & \operatorname{curl} \left(\alpha \mathbf{f} - \nu \operatorname{curl} \mathbf{w} \right) + \operatorname{grad} \left(\dot{p} + \nu' \frac{D\dot{p}}{Dt} \right) \times \operatorname{grad} \alpha \\ & - \operatorname{grad} \left(2\nu \frac{D \log \alpha}{Dt} \right) \times \operatorname{grad} \log \mu \\ & + \operatorname{curl} \{ \nu \operatorname{grad} \mu [\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})_c] \}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where \mathbf{f} is the extraneous force, p is the pressure, $\nu \equiv \mu \alpha$, $\nu' \equiv (\lambda + 2\mu) \alpha$, λ and μ are the coefficients of viscosity, and $\rho = \alpha^{-1}$ is the density. The general result is rather complicated, and we shall rest content with a discussion of two special cases.

¹⁾ C. TRUESDELL, *The effect of viscosity on circulation*, J. Meteor. 6, 61—62 (1949), equation (2).

First, for a homogeneous incompressible fluid of uniform viscosity subject to conservative extraneous force (3) and (4) yield

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\mathbf{w} \operatorname{grad} A) - \mathbf{w} \operatorname{grad} \frac{DA}{Dt} &= -\nu \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{w} \operatorname{grad} A \\ &= -\nu \operatorname{div} (\operatorname{curl} \mathbf{w} \times \operatorname{grad} A) = \nu \operatorname{div} (A \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{w}) . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Consider a fluid motion in a finite vessel. From the fact that $\mathbf{v} = 0$ upon the walls it is possible to show that $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{w}$ is tangential to the walls¹. When (5) is integrated over the whole volume V , by the divergence theorem the right-hand side can be transformed into surface integral, which vanishes because $d\mathbf{s} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{w} = 0$. Hence we obtain

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{w} \operatorname{grad} A \, dV = \int_V \mathbf{w} \operatorname{grad} \frac{DA}{Dt} \, dV . \quad (6)$$

In particular, if A be any substantially constant function in a motion of a homogeneous viscous incompressible fluid in a finite vessel V , then

$$\int_V \mathbf{w} \frac{\partial A}{\partial x_w} \, dV = \text{const.} \quad (7)$$

When the effect of viscosity is neglected, by ERTEL's theorem above we obtain the stronger result $\mathbf{w} \partial A / \partial x_w = \text{const}$ for each particle. That viscosity may either increase or decrease the quantity $\mathbf{w} \partial A / \partial x_w$ may be seen from an example: in the special case when $\mathbf{w} = \mathbf{k} w$, $\operatorname{grad} A = \mathbf{k} \partial A / \partial z$, (5) reduces to

$$\frac{D}{Dt} \log \left(w \frac{\partial A}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{w} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (8)$$

and the Laplacian on the right may be either positive or negative, according to the circumstances. Thus in a fluid endowed with viscosity ERTEL's theorem $\mathbf{w} \partial A / \partial x_w = \text{const}$ ceases to hold precisely, yet (7) may be interpreted as a statement that for a homogeneous incompressible fluid it continues to hold on the average. This example is not the first²) in which a conservation principle holding locally for inviscid incompressible fluids is invalidated by any amount of viscosity, *however small*, but nevertheless remains true in a weaker integrated form, *however large* the viscosity may be, while the integrated quantity which is conserved is itself not explicitly dependent upon the magnitude of the viscosity³).

¹) The general proof, employing curvilinear co-ordinates, is lengthy, but the truth of the result is suggested from the easily analyzed case of a plane boundary surface.

²) For another example, see C. TRUESDELL, *On the total vorticity of motion of a continuous medium*, Phys. Rev. [2] 73, 510–512 (1948).

³) This result illustrates the non-uniform character of the limit $\mu \rightarrow 0$. Cf. C. TRUESDELL, *Bernoulli's theorem for viscous compressible fluids*, Phys. Rev. [2] 77, 535–536 (1950).

In the case of an inviscid fluid subject to conservative extraneous force (3) and (4) for a scalar A yield ERTEL's formula

$$\frac{D}{Dt} (\alpha \mathbf{w} \cdot \text{grad } A) - \alpha \mathbf{w} \cdot \text{grad } \frac{DA}{Dt} = \alpha \frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)}. \quad (9)$$

In any barotropic motion, or in a baroclinic motion where $A = A(p, \alpha)$, the right-hand side of (9) is zero. In a baroclinic motion in which

$$\frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)} \neq 0,$$

we may regard the surfaces $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $A = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ as cutting space into unit p - α - A cells. Equivalently, if we picture the motion in a p - α - A space, the volume inclosed by a surface s is simply the number of unit p - α - A cells inclosed by s . Now this same volume may be computed in the physical x - y - z space, and by the ordinary formula of transformation for volume integrals we have

$$\int_V dp \, d\alpha \, dA = \int_V \frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)} \, dx \, dy \, dz = \int_V \left(\alpha \frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)} \right) \rho \, dx \, dy \, dz. \quad (10)$$

Since the transformation between the two spaces is continuous¹⁾, the number of unit p - α - A cells in V is not changed, and thus by (10)

$$\alpha \frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)}$$

is the number of p - α - A cells per unit mass in the physical space. This interpretation was derived by ERTEL.

For a fluid which is not piezotropic, p and α may be regarded as functions of the temperature θ and the entropy η . Then

$$\frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(p, \alpha, A)}{\partial(\theta, \eta, A)} \cdot \frac{\partial(\theta, \eta, A)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(p, \alpha)}{\partial(\theta, \eta)} \cdot \frac{\partial(\theta, \eta, A)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(\theta, \eta, A)}{\partial(x, y, z)}, \quad (11)$$

where the last result follows from the thermodynamical formula

$$\frac{\partial(p, \alpha)}{\partial(\theta, \eta)} = 1.$$

Hence ERTEL's theorem is equally susceptible of interpretation in terms of unit θ - η - A cells.

¹⁾ A precise derivation of the BJERKNES circulation theorem, based similarly upon a continuity argument, is given in C. TRUESDELL, *Trois conférences faites à la Sorbonne*, U. S. Naval Research Lab. Theoretical Mech. Section Mem. No. 3836—1, App. 3^e conf.

ERTEL applied his theorem to several meteorological observables. Another application occurs in ordinary gas dynamics, where $D\eta/Dt = 0$ and hence it is natural to put $A = \eta$ and obtain by (11) and (9)

$$\alpha w \frac{\partial \eta}{\partial x_w} = \text{const.} \quad (12)$$

This result might be applied to an analysis of the entropy gradient and vorticity in the flow behind curved shock.

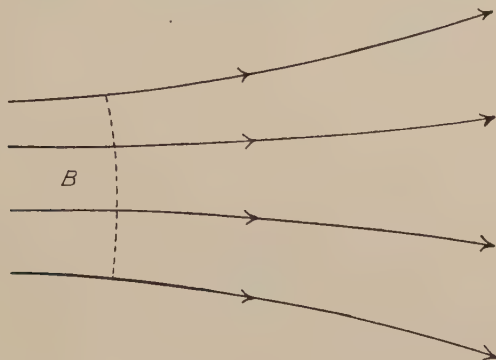


Fig. 1

A very simple application of ERTEL's theorem which seems to have escaped notice is to be found in a flow of an incompressible but inhomogeneous fluid: $D\alpha/Dt = 0$, but $\alpha \neq \text{const.}$ Putting $A = \alpha$ in (9) yields

$$w \frac{\partial \alpha}{\partial x_w} = \text{const} \quad (13)$$

for each particle. Thus if for a given particle $|\partial\alpha/\partial x_w|$ decrease, w must increase, and conversely; furthermore, $\partial\alpha/\partial x_w$ is always of one sign. To grasp this result, consider a very special case: a steady complex-laminar flow in which Bernoullian surfaces (surfaces which are both stream-surfaces and vortex-surfaces) exist. The normal distance between two neighboring stream-lines on a Bernoullian surface is then Δx_w ; since $\alpha = \text{const}$ upon each stream-line the difference $\Delta\alpha$ for the two stream-lines is similarly constant. Hence if the stream-lines on a Bernoullian surface diverge in the direction of flow, the vorticity must increase, while if they converge, the vorticity must decrease. In the general case when Bernoullian surfaces do not exist and the vorticity and velocity are not perpendicular, a corresponding analysis in terms of the paths of the particles is more elaborate.

Now since flows of the type under consideration are reversible, no definite conclusion regarding the signs of the terms is possible: if a given flow be such that the particles move into a region of lower density gradient, equally possible is the reverse flow in which the particles move into a region of higher density gradients. We may nevertheless infer a remarkable conclusion from (13). Consider a flow (say for simplicity a steady flow) in which *any* two stream-lines diverge increasingly in the direction x of motion (Fig. 1).

Since $\alpha = \text{const}$ on each stream-line, then $|\text{grad } \alpha| \rightarrow 0$ as $x \rightarrow +\infty$, and thus the fluid is flowing into a region of more nearly uniform density; *a fortiori*, $\partial\alpha/\partial x_w \rightarrow 0$. Subject to the assumption¹⁾ that $w \neq 0$, $\partial\alpha/\partial x_w \neq 0$ in some region B , from (13) it follows that $w \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow +\infty$: *that is, in flows of this type as the density becomes more nearly uniform the vorticity increases without limit.*

Zusammenfassung

Eine kinematische Verallgemeinerung von ERTELS Wirbelsatz wird abgeleitet. Die allgemeine Formel wird für ein zähigkeitsbehaftetes kompressibles Medium spezialisiert; ebenso werden weitere Spezialfälle behandelt. Es wird gezeigt, daß ERTELS Satz in einem reibenden kompressiblen Medium im räumlichen Mittel, im allgemeinen aber nicht lokal gilt.

(Received: September 26, 1950.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch

Von P. P. BIJLAARD, Ithaca, N. Y.²⁾

Zu Prof. STÜSSIS Aufsatz mit demselben Titel in dieser Zeitschrift³⁾, der besonders von meiner Theorie des plastischen Ausbeulens handelt, sei es mir erlaubt, das Folgende zu bemerken.

Prof. STÜSSI schließt aus einigen Versuchen an Rohren, daß die mathematische Plastizitätstheorie und damit auch meine Theorie des plastischen Beulens von Platten ungültig sei.

Seine Versuche haben nichts ergeben, was nicht schon lange bekannt wäre. Seine aus diesen Versuchen gezogenen Schlußfolgerungen sind aber nicht richtig.

¹⁾ This assumption is never satisfied by a plane or a rotationally-symmetric flow.

²⁾ Cornell University, Ithaca, New York.

³⁾ ZAMP 1, 254 (1950).

1. Prof. Stüssi hat gemessen, daß bei den plastischen Formänderungen die Querkontraktion ε_{ypl} kleiner ist als die Hälfte von ε_{xpl} . Weil nach der Plastizitätstheorie die Querkontraktion $\varepsilon_{ypl} = \varepsilon_{xpl}/2$ sein sollte – wegen des konstant bleibenden Volumens –, schließt er, daß bei den plastischen Formänderungen das Volumen nicht konstant bleibe. *Diese Folgerung ist aber nicht gerechtfertigt.* Dies hätte nur geschlossen werden dürfen, wenn auch die Dehnung ε_{zpl} in radialer Richtung gemessen worden und $\varepsilon_{xpl} + \varepsilon_{ypl} + \varepsilon_{zpl} \neq 0$ gewesen wäre. Das Resultat $\varepsilon_{ypl} \neq \varepsilon_{xpl}/2$ weist vielmehr darauf hin, daß das Material sich anisotrop verhält, wodurch es sich leichter in der Dickenrichtung des Rohres als in der Längsrichtung verformt, so daß zum Beispiel $\varepsilon_{ypl} = -0,3 \varepsilon_{xpl}$ und $\varepsilon_{zpl} = -0,7 \varepsilon_{xpl}$. Dies heißt, daß für einachsigen Zug LODEs Wert [1]¹⁾

$$\nu = \frac{\varepsilon_{ypl} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{xpl} + \varepsilon_{zpl})}{\frac{1}{2}(\varepsilon_{xpl} - \varepsilon_{zpl})}$$

nicht derselbe ist wie sein Wert

$$\mu = \frac{\sigma_{ypl} - \frac{1}{2}(\sigma_{xpl} + \sigma_{zpl})}{\frac{1}{2}(\sigma_{xpl} - \sigma_{zpl})},$$

während nach der Plastizitätstheorie $\nu = \mu$ sein sollte. Im obigen Fall ist nämlich $\mu = -1$, jedoch $\nu = -0,53$. Derartige Abweichungen wurden schon von LODE gefunden [2]. Für $\mu = -1$ fand er Werte von ν zwischen $-0,4$ und $-1,2$.

Obschon dies aus Prof. Stüssis Versuch wegen mangelnder Quermessungen nicht gefolgert werden kann, ist es doch bekannt, daß bei großen plastischen Formänderungen das Volumen nicht vollkommen konstant bleibt [3]. Derartige Abweichungen vom idealen Verhalten können natürlich kleine Unterschiede verursachen zwischen Theorie und Versuch. Für meine Theorie des plastischen Beulens sind diese Abweichungen aber nicht größer als einige Prozent [4][5].

2. Prof. Stüssi überlagerte verschiedenen Laststufen des reinen Ringspannungszustandes σ_x Vertikalspannungen σ_y . Es überraschte ihn, daß das Material sich hierbei elastisch verhält. Das ist aber ganz in Übereinstimmung mit der Plastizitätstheorie. Die plastischen Formänderungen sind durch die Gestaltänderungsarbeit bestimmt, so daß die einachsige Zug- oder Druckspannung σ_0 , mit der ein zweiachsiger Spannungszustand σ_x, σ_y gleichwertig ist, durch die Gleichung

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 = \sigma_0^2 \quad (1)$$

gegeben wird. Nach Gleichung (1) sind alle zweiachsigen Spannungszustände σ_x, σ_y , welche mit σ_0 gleichwertig sind, durch die Ellipse in Figur 1 bestimmt. Wird nun einer Spannung $\sigma_x = \sigma_0$ eine Spannung σ_y überlagert, wie in Stüssis Versuch, dann bewegt sich in Figur 1 der Spannungszustand in Richtung des Pfeiles 1. Es tritt also Entlastung auf, so daß ausschließlich elastische Formänderungen entstehen. *Das Resultat des Versuches ist folglich ganz in Übereinstimmung mit der Theorie.*

Beim plastischen Beulen von durch einachsigen Druck belasteten und entlang den unbelasteten Seiten gelenkig gelagerten Platten, worauf Figur 10 in Stüssis

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 117.

Aufsatz sich bezieht, wächst σ_x zugleich mit σ_y , so daß beim Beulen der ursprüngliche Spannungszustand $\sigma_x = \sigma_0$ sich etwa in Richtung des Pfeiles 2 bewegt. Die gleichwertige einachsige Spannung wächst also an, so daß der Spannungszustand im plastischen Gebiet bleibt.

Nach meiner Theorie verhält sich das Material dabei nicht quasiisotrop. Ich möchte dabei auf meinen in Zürich gehaltenen Vortrag verweisen [6], wo ich auf

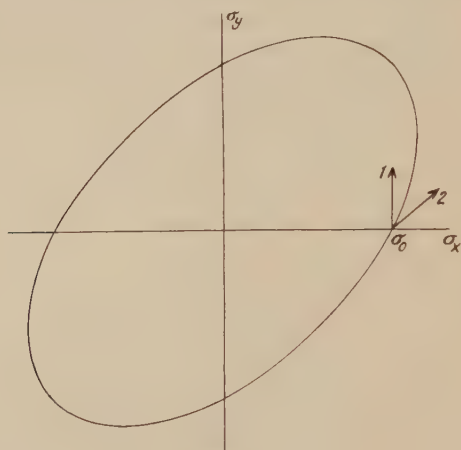


Fig. 1

Seite 21 angegeben habe, daß das anisotrope Verhalten von sieben verschiedenen Konstanten beherrscht wird. Das Material verhält sich nur dann quasiisotrop, wenn von Anfang an die Spannungskomponenten in demselben Verhältnisse wachsen. *Auch beim richtig durchgeführten Versuche hätte Prof. Strüssi hier also kein quasiisotropes Verhalten erwarten können.*

3. Prof. Strüssi fand weiter, daß das Material sich bei Überlagerung eines einachsigen Zuges σ_x mit Schubspannungen τ_{xy} ungefähr elastisch verhält und umgekehrt. Dies wurde schon 1932 von HOHENEMSER und PRAGER [7] bei ihren Versuchen mit Rohren gefunden. Ich habe auf diese Versuche in Abhandlungen über meine Theorie hingewiesen [8], wo ich zeige, daß dasselbe Verhalten nach meinen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen folgt, wenn ich annehme, daß das Material sich wie ein Prandtl-Reuß-Körper verhält, wobei der Wert e in meinen Gleichungen gleich Null gesetzt werden muß. Aus KOLLBRUNNERS Versuchen an Winkelstäben [9] schloß ich aber schon 1938 in meinen ersten Abhandlungen über diese Materie, daß jedenfalls für Aluminium der Wert e nicht verschwindet und daß beim plastischen Beulen vielmehr ein Verhalten wie bei einem Hencky-Körper auftritt [10].

Das wurde durch spätere Versuche an Stäben mit kreuzförmigem Querschnitt des National Advisory Committee for Aeronautics (N. A. C. A.) in Amerika bestätigt, wobei die Beulspannungen mit meiner Theorie vollkommen in Übereinstimmung sind, während die Annahme eines Verhaltens wie ein Prandtl-Reuß-Körper ($e = 0$) viel zu hohe Beulspannungen liefert [5].

Ich habe dieses Verhalten wie folgt erklärt [5]. Das wirkliche Verhalten des Materials liegt zwischen den Verhaltensregeln eines Prandtl-Reuß-(plastic flow)

und eines Hencky-Körpers (plastic deformation). Die Annahme eines Hencky-Körpers setzt voraus, daß die plastische Deformation dieselbe ist, wie wenn die Spannungskomponenten in derselben Proportion angewachsen sind, welche sie im Endzustand haben. In diesem Fall geschieht die plastische Formänderung quasiisotrop, und man kann sie durch Verschiebungen in allen Flächen entstanden denken, die mit den in diesen Flächen wirkenden Schubspannungen proportional sind. Wird nun, wie in Stüssis Versuch, einem reinen Zug (oder Druck) eine Schubspannung überlagert, dann wird in einigen kristallographischen Flächen die Schubspannung zunehmen, in anderen Flächen aber abnehmen. In den Flächen, wo die Schubspannung abnimmt, wird keine plastische Schiebung auftreten, was wahrscheinlich auch die Schiebungen in den anderen Flächen mehr oder weniger hemmt, so daß praktisch nur elastische Formänderungen auftreten werden, wie in einem Prandtl-Reuß-Körper. Beim Beulen tritt aber ein anderer Fall auf. Auch kleinerer Exzentrizitäten wegen wird die maximale Druckkraft erst bei kleinen Ausbiegungen erreicht, so daß zum Beispiel beim Beulen von kreuzförmigen Querschnitten die Druckspannungen zugleich mit den Beul-Schub-Spannungen wachsen. Dadurch werden praktisch in allen Flächen die Schubspannungen zunehmen, so daß in allen Flächen plastische Schiebungen auftreten, entsprechend dem Verhalten eines Hencky-Körpers (plastic deformation, $e \neq 0$).

Die von Prof. Stüssi mitgeteilten Versuche haben also nichts Neues ergeben und sind nicht in Widerspruch mit der Plastizitätstheorie. In meiner Theorie des plastischen Beulens von Platten sind die einschlägigen Erscheinungen schon von Anfang an (1938) berücksichtigt. Alle bisher veröffentlichten Versuche (KOLLBRUNNER, Stüssi 1948, N.A.C.A.) sind mit meiner Theorie in guter Übereinstimmung[5]. Die Versuchswerte sind nie höher als die theoretischen Werte. Der Versuch mit nur einer Platte «Avional M weich», welchen Stüssi jetzt mitteilt, ist der einzige, der eine höhere Beulspannung liefert als meine Theorie; er steht also in Widerspruch mit zahllosen anderen Versuchen. Kürzlich veröffentlichte der N.A.C.A. für denselben Fall sehr genaue Versuche, die in ausgezeichneter Übereinstimmung mit meiner Theorie sind[11].

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. NADAI, *Plasticity* (McGraw-Hill, New York 1931), S. 77.
- [2] W. LODE, Mitt. Forschungsarb., H. 303 (1928).
- [3] A. NADAI, l. c., S. 76.
- [4] P. P. BIJLAARD, C. F. KOLLBRUNNER und F. STÜSSI, 3. Kongr. int. Ver. Brücken- u. Hochbau, Lüttich, Vorbericht, S. 119 (1948).
- [5] P. P. BIJLAARD, J. aeron. Sci. 16, 529 (1949).
- [6] P. P. BIJLAARD, Mitt. Inst. Baustatik ETH., Zürich, Nr. 21 (1947).
- [7] K. HOHENEMSER und W. PRAGER, Z. angew. Math. Mech. 12, 1 (1932).
- [8] P. P. BIJLAARD, Abh. int. Ver. Brücken- u. Hochbau 6, 45 (1940–41).
- [9] C. F. KOLLBRUNNER, Mitt. Inst. Baustatik ETH., Zürich, Nr. 4 (1935).
- [10] P. P. BIJLAARD, Proc. Kon. Akad. Wetensch., Amsterdam, 41, 731 (1938).
- [11] R. A. PRIDE und G. J. HEIMERL, Nat. Adv. Comm. Aeron., Washington, Techn. Note No. 1817 (1949).

Stellungnahme zur Zuschrift von Prof. P. P. Bijlaard

Die Zuschrift meines geschätzten Kollegen Prof. P. P. BIJLAARD veranlaßt mich zu den folgenden Bemerkungen:

1. Querdehnungszahl und Volumenkonstanz

Es war vielleicht etwas unvorsichtig von mir, anzunehmen, daß beim einachsigen Spannungszustand σ_x die beiden Querdehnungen ε_y und ε_z gleich groß seien. Diese Annahme ist jedoch genau so gut oder so schlecht gerechtfertigt wie diejenige der Plastizitätstheorie, die aus einer hypothetischen Volumenkonstanz bei plastischen Formänderungsanteilen die Querdehnungszahl m_{pl} zu $m_{pl} = 2,0$ ableitet. Wesentlich ist, und das ist der Sinn unserer Versuche, daß dieser Wert $m_{pl} = 2,0$ unrichtig ist; es ist deshalb unzulässig, die plastischen Formänderungen mit diesem Wert zu berechnen und insbesondere einen plastischen Schubmodul $G_{pl} = E_{pl}/3$ einzuführen.

2. Entlastung oder Anisotropie

Prof. BIJLAARD führt die in Figur 6 meines Aufsatzes dargestellten Versuchsergebnisse auf eine «Entlastung» im Sinne der Theorie der konstanten Gestaltänderungsarbeit (Pfeil 1 in seiner Figur) zurück. Diese Überlegung ist richtig, wenn sowohl σ_{0x} wie σ_y Zugspannungen sind. Nun haben wir aber auch Versuche durchgeführt, bei denen einer Zugspannung σ_{0x} Druckspannungen σ_y überlagert wurden; die Ergebnisse, die in der beigegebenen Figur 1 dargestellt sind, sind

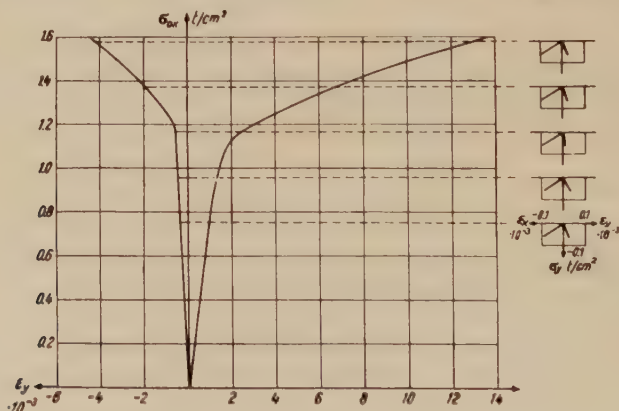


Fig. 1

grundsätzlich die gleichen wie für eine Zugspannung σ_y . Da für diesen Fall der Bijlaardsche Pfeil 1 aus der Ellipse hinaus zeigt, kann hier von einer Entlastung nicht mehr die Rede sein, und die Bijlaardsche Argumentation wird hinfällig. Sie trifft ebenfalls bei der Überlagerung von Schubspannungen nicht zu.

Prof. BIJLAARD spricht wohl in seinen Arbeiten davon, daß bei einer Richtungsänderung des Spannungsdeviators das Material sich anisotrop verhalten könne; in seiner Theorie des Ausbeulens verwendet er aber im Gegensatz dazu

die Formänderungsbeziehungen der Quasiisotropie. Gerade diese innere Unsicherheit der Bijlaardschen Theorie (neben einigen andern Beobachtungen) veranlaßte mich, die bei der Theorie des Ausbeulens erforderlichen Formänderungsbeziehungen durch direkt auf diese Problemstellung orientierte Versuche zu untersuchen.

3. Übereinstimmung mit Beulversuchen

Prof. BIJLAARD weist auf die gute Übereinstimmung seiner Theorie mit den bisherigen Beulversuchen hin. Diese Übereinstimmung war auch mir bekannt, und deshalb bin ich früher für seine Theorie eingetreten.

Nun sind aber die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der beiden Theorien von der Form des Spannungs-Dehnungs-Diagramms des Materials abhängig, und es zeigt sich, daß bei den bisher verwendeten Materialien mit relativ kurzer Übergangszone zwischen Proportionalitäts- und Fließgrenze und mit ausgesprochener Fließgrenze diese Unterschiede nur klein sind. In Figur 2 habe ich die nach meiner Theorie berechnete Beulspannungslinie für gleichmäßig verteilten Druck und gelenkig gelagerte Längsränder und für das von C. F. KOLLBRUNNER verwendete «Avional M hart» (vergütet) der von P. P. BIJLAARD selber nach seiner Theorie berechneten Beulspannungslinie gegenübergestellt. Die (zufällige) Übereinstimmung der beiden Kurven ist überraschend gut, so daß ich das schließlich entscheidende Argument der guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch auch für mich in Anspruch nehmen darf.

Nun haben wir aber für unsere neuen Versuche nach einem Material mit großem unelastischem Bereich gesucht und es im «Avional M weich» (unver-

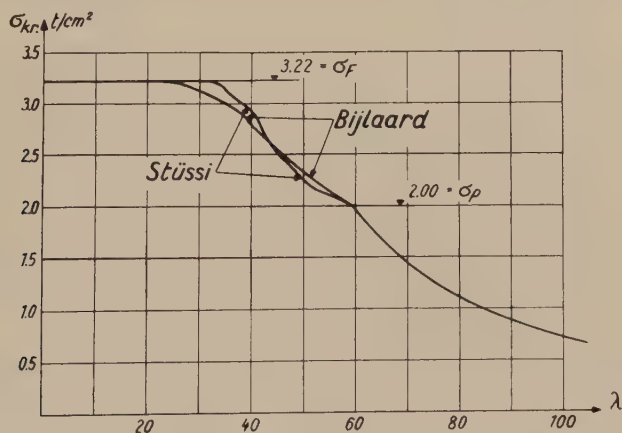


Fig. 2

gütet) auch gefunden. Bei der hier vorliegenden Form des Spannungs-Dehnungs-Diagramms ergeben sich nun die in Figur 10 meines Aufsatzes ersichtlichen beträchtlichen Unterschiede zwischen den beiden Theorien, und der dort erwähnte Versuch, auch wenn er vorläufig noch isoliert ist, erhält damit sein besonderes Gewicht.

F. Strüssi.

(Eingegangen: 15. 1. 1951.)

Das Kolloquium über Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus in Grenoble

Vom 2. bis 7. Juli 1950 fand in Grenoble ein internationales Treffen von etwa 50 auf dem Gebiet des Magnetismus arbeitenden, aus verschiedensten Ländern kommenden Physikern statt. Das Kolloquium war vom Centre national de la Recherche scientifique mit materieller Unterstützung der Rockefeller-Stiftung organisiert und brachte einen Überblick über den Stand der Arbeiten auf dem Gebiet des Ferro- und Antiferromagnetismus.

Man kann feststellen, daß die schon alten Anschauungen von NÉEL über den Antiferromagnetismus, der durch eine negative, im Gegensatz zu der im Ferromagnetismus positiven Ausrichtung der Elementarmagnete gekennzeichnet ist, ihre rechnerische (VAN VLECK) und experimentelle Bestätigung gefunden haben. Indirekte Bestätigung fanden sie durch Untersuchungen über Metalle und Oxyde (FOEX, TROMBE, MICHEL, BIZETTE, CHEVALIER) und über einige Paramagnetika in der Nähe des absoluten Nullpunktes (GORTER, KÜRTI, GARRETT); Neutronendiagramme gestatteten, die antiparallele Verteilung der Elementarmagnete zu «sehen».

Experimente mit den für die Technik so wichtigen Ferriten (SNOEK, VAN SANTEN, GUILLAUD, PAUTHENET) lassen ihre Magnetisierung als eine Kombination von Ferro- und Antiferromagnetismus erscheinen, bei der zwei ferromagnetische Teilgitter negativ gekuppelt sind und ihre Momente teilweise kompensieren (Ferrimagnetismus).

Wenn das von WEISS zur Erklärung des Ferromagnetismus eingeführte Molekularfeld somit eine neue Anwendung gefunden hat, bleibt doch die Erklärung des Ferromagnetismus durch die Eigenschaften des Elektronenkollektivs eine verlockende Anschauung (STONER). Aber das Interesse erstreckte sich mehr auf den Mechanismus der Magnetisierungskurve als auf die Berechnung des Sättigungsmomentes (SMOLUKOWSKI, FORRER).

Die Bitterschen Streifen über Einkristalle und neuerdings über polykristalline Stoffe (BOZORTH, BATES, STEWART) erlauben, die von NÉEL vorausgesehenen Figuren der Weißschen Bezirke sichtbar zu machen und die Wandverschiebungen im wechselnden Feld zu verfolgen; die Vorführung von Filmen war dabei besonders eindrucksvoll (SHOCKLEY, BATES).

Das Gebiet der schwachen Felder ist eingehend (SNOEK, EPELBOIN, LANGEVIN, GOLDSCHMIDT) bis zu den Ultrakurzwellen untersucht worden (KITTEL); bei letzteren hat es den Anreiz einer relativ leichten Messung des gyromagnetischen Effekts durch die ferromagnetische Resonanz. Die beobachteten Abweichungen vom Raleighschen Gesetz sowie die Werte der Verlustwinkel erscheinen unter neuem Licht dank der Theorie der magnetischen Nachwirkung (NÉEL), die den Einfluß der Atomdiffusion streng von dem der inneren Feldschwankungen trennt. Die experimentelle Untersuchung der Nachwirkung (LIBOUTRY, BARBIER) erstreckt sich auch auf die Felsen und hat dabei (THELLIER) eine interessante Anwendung gefunden, nämlich die Kenntnis des Magnetfeldes der Erde im Laufe der Zeiten durch Messung der Remanenz von Gesteinen.

Die Permanentmagnete waren Gegenstand verschiedener Referate (HOSELITZ, WEIL). Magnete, hergestellt aus Pulvern von ausreichender Feinheit zur Bildung

von Elementarbezirken, die neuerdings auch in der Technik Anwendung gefunden haben, erläutern die Rolle der inneren entmagnetisierenden Felder in der Theorie der Koerzitivkraft. Die Orientierung der Magnete durch das Magnetfeld basiert jetzt auf soliderer theoretischer Grundlage.

Eine Zusammenstellung der Berichte und der anschließenden Diskussionen wird in einer Sondernummer des *Journal de Physique* veröffentlicht werden und wird für den Physiker und den Techniker einen Überblick über die Fragen des Magnetismus bringen, deren schnelle Entwicklung während der letzten Jahre das Interesse bestätigt.

L. WEIL

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Introduction to Theoretical and Experimental Optics. By J. VALASEK (John Wiley & Sons, New York 1949). 454 pp.; \$6.50.

Das in der 1. Auflage erscheinende Buch gibt eine kurzgefaßte Zusammenstellung sowohl der geometrischen als auch der physikalischen Optik. In knapp 500 Seiten werden diese Gebiete behandelt. Es entsprach dem Willen des Autors, auf die Darstellung von Detailfragen zu verzichten und sich ganz auf die Behandlung der grundsätzlichen Fragen zu beschränken. Die Darstellung ist überaus klar, systematisch gegliedert und recht verständlich geschrieben.

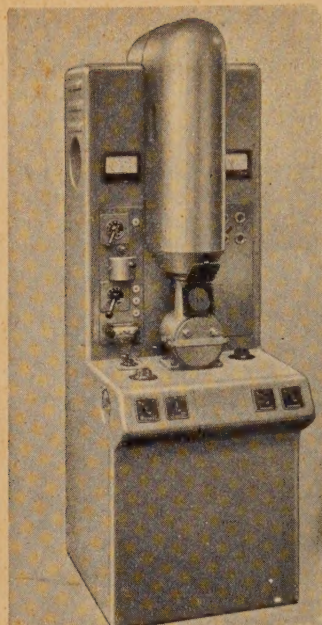
In der geometrischen Optik werden in acht Kapiteln die fundamentalen Prinzipien, die idealen optischen Systeme (kollineare Transformation) und die trigonometrische Berechnung des Strahlenganges durch Linsensysteme behandelt. Ebenso sind die physikalischen Begrenzungen (Abbe-Bedingungen), dann die Bedeutung der Öffnungen und Blenden dargestellt. Weiter sind in diesem Teil des Buches die Grundprinzipien der Photometrie und der optischen Instrumente behandelt.

Im 2. Teil, der der physikalischen Optik gewidmet ist, sind die mit der Wellennatur des Lichtes zusammenhängenden Erscheinungen beschrieben, wie Interferenz, Beugung und Polarisation.

In einem 3. Teil sind die ebenfalls zur physikalischen Optik gehörenden Gebiete der Strahlung und der Spektren, sowie die magneto- und elektrooptischen Erscheinungen zur Darstellung gebracht. Am Schlusse des Buches ist eine Zusammenstellung von klassischen optischen Experimenten gegeben.

Die Literatur kennt schon eine ganze Reihe von Büchern, die eine ähnliche Zielsetzung haben, wie das von VALASEK verfaßte Werk. Der Referent ist aber durchaus der Meinung, daß das vorgelegte Buch einen genügend stark ausgeprägten eigenen Charakter der Darstellung aufweist, um seine Existenz zu rechtfertigen. Für das erste erweiterte Studium der Optik als Spezialgebiet ist das Buch sehr zu empfehlen. Aber auch der Fachmann wird es wegen der sehr übersichtlichen Gliederung des Stoffes als Hilfsmittel gerne benützen.

E. Baumann



Universal Kathodenstrahl- oszillograph

Besonders geeignet für Stoßprüfanlagen und Untersuchungen von Abschaltvorgängen usw.

Eingebaute Hochspannungsanlage für 15, 25, 35 und 45 kV. Eingebaute Null-Linienverschiebung.

Empfindlichkeit in V/mm:

für die Zeitachse: $0,55 \times \text{Anodenspannung in kV}$;

für die Meßspannung: $0,44 \times \text{Anodenspannung in kV}$.

Strichscharfe: 0,03–0,3 mm, log. Zeitablenkung $1\mu\text{s} - 1000\mu\text{s}$ lin. Zeitablenkung $1000\mu\text{s} - 1\text{s}$, einmalig und wiederholt.

Einschwingzeit: $0,2\mu\text{s}$; Registrierformat $6 \times 6\text{ cm}$;

Registriervermögen: 10–15 Perioden pro mm.

Schreibgeschwindigkeit 5000 km/s.

Trüb, Täuber & Co. AG.

Fabrik elektr. Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate
ZÜRICH

PHYSIKALISCHE *Blätter*

Diese Monatsschrift für Grundfragen und Randprobleme der Physik verbindet allgemeine Verständlichkeit mit wissenschaftlicher Sorgfalt. Jedes Heft bringt aus der Fülle des Stoffes eine wertvolle Übersicht, die zeitraubendes Quellenstudium erspart. Leser der *Physikalischen Blätter* sind stets mit den neuesten Arbeiten, wichtigsten Ergebnissen und bedeutendsten Erkenntnissen vertraut. Lassen Sie sich unverbindlich ein Probeheft zusenden.

PHYSIKALISCHE *Schriften*


In zwangloser Folge sollen in dieser Schriftenreihe einzelne Probleme der Physik in jeweils abgeschlossenen Schriften dargestellt werden.

Heft 1: W. Kossel:

Zur Darstellung der Elektrizitätslehre.
32 Seiten, broschiert, DIN A 5, DM 2.—.

In Vorbereitung:

Heft 2: F. Kirchner, Naturkonstanten.

PHYSIK VERLAG MOSBACH/BADEN  SCHEFFELSTRASSE 1 TELEFON 396

Deutschland

Demnächst erscheinen:

A. OSTROWSKI

Professor an der Universität Basel

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung

Zum Gebrauch bei akademischen Vorträgen sowie zum Selbststudium

Zweiter Band

Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen

484 Seiten mit 55 Figuren, in Ganzleinen Fr. 67.—, broschiert Fr. 63.—

In erster Linie enthält der zweite Band eine vertiefte Behandlung der grundlegenden Begriffe der Analysis. Ferner eine verhältnismäßig ausführliche Behandlung der numerischen Rechenmethoden, die sonst etwas stiefmütterlich erledigt werden. Auch in diesem Band findet man eine große Anzahl von neuen Aufgaben, die sich sowohl auf die praktischen als auch auf die theoretischen Teile des Lehrstoffes beziehen.

M. WALDMEIER

Professor an der Eidg. Technischen Hochschule und an der Universität Zürich

Die Sonnenkorona

Erster Band

Beobachtungen der Korona 1939–1949

270 Seiten, 1410 Koronadiagramme. In Ganzleinen Fr. 28.60, broschiert Fr. 24.60

Mit dem demnächst erscheinenden *ersten Band* wird zur Veröffentlichung der Ergebnisse des Verfassers auf dem Gebiet der Koronaforschung in den letzten zwölf Jahren der Anfang gemacht. Der erste Band vermittelt in konzentrierter Form das sich über einen ganzen Zyklus der Sonnenaktivität erstreckende Beobachtungsmaterial der monochromatischen Korona. Der *zweite Band* wird «Struktur und Variationen der Korona» behandeln, und der *dritte Band* die «Physik der Korona».

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

